ICAL
ETY

MEMOIRS

OF THE

COLLEGE OF SCIENCE

KYOTO IMPERIAL UNIVERSITY

SERIES A

VOL. XXI

1938

KYOTO

CONTENTS OF VOLUME XXI

PAGE

Kenzo Tanaka and **Hisatugu Kano**—The Oxidation of Aluminium Foils 1

Tatuo Nakae—Eine Anwendung der Quaternionen zur Kugelgeometrie 5

Tadao Namekawa and **Tatutosi Takahasi**—A Theoretical Note on the Diurnal Variation of Wind-Vector due to the Variation of Eddy Viscosity 31

Tatsumi Terada—Effect of High Frequency Oscillation on the Photo-electric Current 39

Tunezô Satô—On the Proof of Carleman's Extension Theorem of Liouville Theorem 47

Tameharu Shirai—On the Condition of the Set which might be a Derived Set 51

Toshichiro Takegami—A Study of the Effect of a Travelling Atmospheric Disturbance upon the Sea-Surface 55

Sueo Yamamori and **Shingi Yoshimoto**—On the Crystalline Configurations of Electrolytic Lead deposited from Nitrate Solutions 75

Kenzo Tanaka—Temperature Variation of Electron Diffraction Patterns of Some Organic Films 85

Michinori Kurihara—Strahlungstheoretische Untersuchungen über die Stellargashülle in Bewegung 89

Miyabi Sugihara—Change of the Elastic Limit of an Aluminium Rod by Annealing 145

Miyabi Sugihara—Elastic Property of an Aluminium Rod and its Crystal Grains 163

Kenzo Tanaka—Examination of Thin Rubber Films by Electron Diffraction 169

Shôtarô Miyamoto—On the Balmer Emission of the Planetary Nebulae 173

Munetosi Namba—An Investigation of Earth Currents on the Volcano Aso, Part I. The Potential Difference of the Upward Earth-current flowing toward the top of a Volcano 203

Yoshiaki Matsunaga—On the Densities of Various Fibres and the Widths of the Intermicellar Spaces 217

Toshichiro Takegami—On the Oscillation of Lake Water Generated by Wind Action 231

1127m

The Oxidation of Aluminium Foils

By Kenzo Tanaka and Hisatugu Kano

(Received December 10, 1937)

Abstract

Electron-diffraction examination of the γ-Al_2O_3 film, formed by the gradual heating of Al foil—either in air or in a vacuum camera—reveals, that some grains of the cubic crystals of γ-Al_2O_3 arrange themselves in an orientation similar to that taken by the cubic crystals of Al in the original foil. It is found that this effect does not follow sudden and prolonged heating of the foil at 900°C.

When aluminium is heated in air or oxygen, or otherwise melted, it is covered by a thin film of oxide. Other investigators[1] have found the film to consist of cubic γ-Al_2O_3. The writers examined this oxide film by the electron-diffraction method, using electrons of about 74 KV., a homogeneous beam being obtained by magnetic deflection.

The exact wave-length of the beam was calculated from the known spacings of ZnO; the standard specimen was obtained by condensing the smoke, produced by burning pure zinc, upon a thin film of acethylcellose. Lattice constants of ZnO were taken as $a=3.25$ Å and $c=5.23$ Å. The calculated value for wave-length then being 0.04355 Å.

Using this value, the lattice constant of aluminium powder and foil was found to be 4.084 Å, a value somewhat larger than that obtained by the X-ray method.

γ-Al_2O_3 (γ-alumina) formed by heating commercial aluminium foil in air gave the results tabulated in Table I. Brill[2] from X-ray measurement gives the value of a as 7.91 Å, while the value of a for γ-alumina formed on molten aluminium was found[3] by electron-diffraction to be 7.780 Å. Our value (7.864 Å) is very near the mean of these two.

The atomic positions for γ-alumina have not yet been fully established.

Commercial beaten aluminium foil thinned by caustic potash always gives the pattern shown in Figs. 1 and 7, Plate I. All of the spots are reflected from atomic planes parallel to one of the cube edges of

1. J. A. Darbyshire and E. R. Cooper: Trans. Faraday Soc., **30**, 1038 (1934). E. Belwe: Z. f. Phys., **100**, 192 (1936). G. D. Preston and L. L. Bircumshaw: Phil. Mag., **22**, 654 (1936).
2. R. Brill: Z. f. Krist., **83**, 323 (1932). 3. J. A. Darbyshire and E. R. Cooper: loc. cit.

the aluminium crystals. The crystals in these foils have their (100) planes nearly parallel to the surface of the foil, and are approximately oriented in the same manner, so the mass of crystals may be regarded as an imperfect single crystal.

Table I.

Indices	Intensity	d (obs.)	a (calc.)
111	m	4.530	7.855
220	s	2.738	7.735
311	ss	2.390	7.925
222	w	2.302	7.975
400	ss	1.978	7.905
511	m	1.511	7.855
440	ss	1.395	7.900
533	m	1.185	7.760
444	m	1.136	7.880
553	w	1.014	7.790
800	m	0.9845	7.870
733	m	0.9795	7.905
844	m	0.8026	7.870
		Mean	7.864

When one of these foils is mounted in the diffraction-camera, and the temperature of the foil is gradually raised, the changing diffraction patterns may be continuously observed on the fluorescent screen. Photographs taken at suitable instants are shown in Figs. 1, 2, 3 and 4, Plate I.

The original aluminium pattern gradually weakens with the rise in temperature and the rings due to γ-alumina formed by the residual oxygen in the camera appear. Fig. 2, Plate I, shows the pattern at 580°C. A further rise in temperature is followed by a corresponding weakening of the spots due to aluminium, and the appearance of spots on the γ-alumina rings side by side with the weak aluminium spots. (Fig. 3, Plate I. 615°C.)

Fig. 1

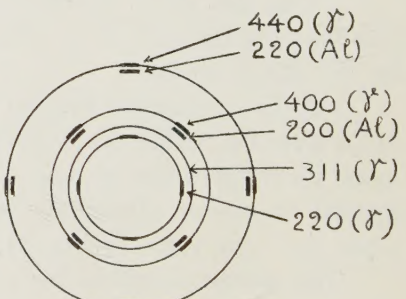


Fig. 1 explains the case more explicitly. As the value of a for γ-alumina is a little less than twice for that of aluminium, corresponding rings of γ-alumina of the order twice that of the spots of aluminium appear just outside the latter—400 (γ) outside of 200 (Al) etc.—, and the distribution of the spots due to the γ-alumina is found to be similar to that of the spots of aluminium.

From this one may conclude that some crystals of γ-alumina are oriented in approximately the same orientation as the original aluminium crystals. The presence of the continuous rings indicates that the remaining γ-alumina crystals are in general arranged fortuitously. However, the relative intensities of these rings show that the crystals have their (100) planes nearly parallel to the foil's surface.

On still further heating, the spots due to aluminium crystals disappear and the pattern is found to be totally due to γ-alumina. (Fig. 4, Plate I.) The oxidation having been completed, further heating or the returning of the specimen to room temperature produces no appreciable change in the pattern.

The orientation effect is also observed when the aluminium foil is heated in air. Fig. 5, Plate I. is a pattern due to two groups of grains, each of which is in (100) orientation and mutually inclined nearly 45° around their common [100] axis. When this foil is heated gradually in air for 4 hours till a final temperature of 610°C is attained, γ-alumina is formed, the orientation of a part of the crystals in the latter being identical to that found in the original aluminium foil. (Fig. 6, Plate I.)

When the foil (Fig. 7, Plate I.) is suddenly heated by placing in a furnace already heated to 900°C and is kept there for 20 minutes, the γ-alumina thus formed shows no signs of particular orientation. The pattern being identical to that of Fig. 6, Plate I. minus the spots, and with the intensity distribution of the rings completely changed. (Fig. 8, Plate I.)

From these observations, it may be considered that the "Orientation Effect" appears when the oxidation takes place previous to the melting of aluminium, and that the oxidation of aluminium in the molten state fails to produce this effect.

Some different relations between the orientation of the metal and of its oxide have already been found in the case of sputtered iron[1] and barium[2]. As the atomic positions of γ-alumina have not yet been fully determined, the mechanism of this effect cannot be confirmed. But, it may be said to be due to the entrance of some oxygen atoms into the crystal lattice of aluminium without fully destroying the latter.

The writers wish to express their sincere gratitude to Prof. U. Yosida for his invaluable suggestions.

---

1. H. R. Nelson: J. Chem. Phys., **5**, 252 (1937).
2. W. G. Burgers and J. J. A. P. van Amstel: Physica, **3**, 1057 (1936).

Plate I

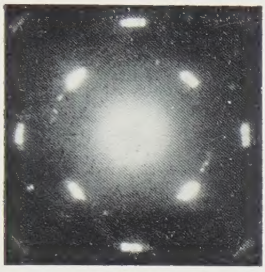


Fig. 1

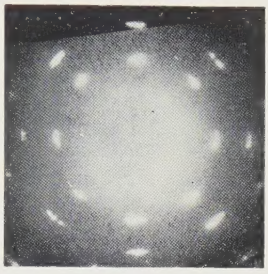


Fig. 5

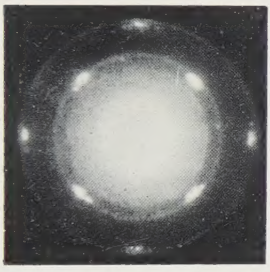


Fig. 2 (580°C)

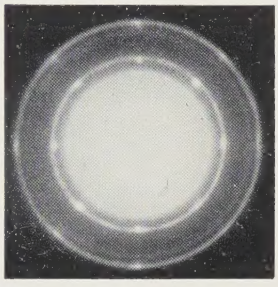


Fig. 6

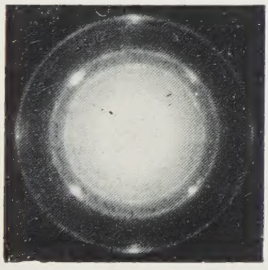


Fig. 3 (615°C)

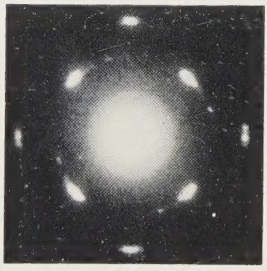


Fig. 7

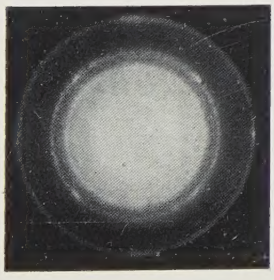


Fig. 4 (720°C)

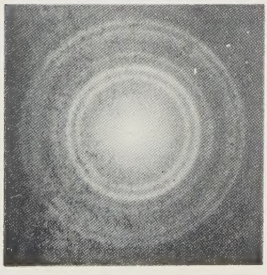


Fig. 8

Eine Anwendung der Quaternionen zur Kugelgeometrie

von **Tatuo Nakae**

(Eingegangen am 15, Dezember 1937)

Zusammenfassung.

Die Hauptsache dieser Abhandlung ist, die Kugel-Transformationen von Lie durch lineare Transformationen der Quaternionen zu zeigen, und ebenso wie bei linearen Transformationen komplexer Zahlen, das Doppelverhältnis von vier Kugeln definieren und die Invarianten von Kugeln, Kreisen oder Punkten auf dieses Doppelverhältnis reduzieren zu können. Ich habe die Andeutung zu diesem Satz Herrn Professor T. Nishiuchi zu verdanken.

§ 1. Einige Eigenschaften der Quaternionen.

In dieser Abhandlung werden Quaternionen und zwar Hyperquaternionen benutzt, im Folgenden sind einige ihrer Eigenschaften erwähnt.

Eine Hyperquaternion A kann durch die Formel dargestellt werden:

$$A=a_0+a_1j_1+a_2j_2+a_3j_3,$$

wo a_0, a_1, a_2 und a_3 komplexe Zahlen, j_1, j_2 und j_3 die Einheiten der Quaternion sind.

Durch $\bar{A}$ zeigen wir die Quaternion

$$\bar{A}=a_0-a_1j_1-a_2j_2-a_3j_3,$$

und

$$|A|^2=A\bar{A}=a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2$$

ist nicht immer eine reelle, sondern eine komplexe Zahl. Mit $\frac{1}{A}$ bezeichnen wir die Quaternion X, (wenn vorhanden) welche die Gleichung

$$AX=1$$

erfüllt.

Es ist leicht bewiesen, dass, $\frac{1}{A}\cdot A=1$ und $\frac{1}{A}=\frac{\bar{A}}{(A\bar{A})}$, wenn $A\bar{A}\neq 0$. Wenn $A\bar{A}=0$, d. h. A ein Nullfaktor, so ist die Division unmöglich.

Gegeben A und B

$$A=a_0+a_1j_1+a_2j_2+a_3j_3, \quad | \quad B=b_0+b_1j_1+b_2j_2+b_3j_3,$$

dann $A\cdot B=(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)$

$$+j_1(a_1b_1+a_1b_0+a_2b_3-a_3b_2)$$
$$+j_2(a_0b_2+a_2b_0+a_3b_1-a_1b_3)$$
$$+j_3(a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2-a_2b_1).$$

Durch diese Formel können wir die folgenden beweisen:

(1) $\overline{(AB)}=\bar{B}\cdot\bar{A}$,

(2) $\left(\overline{\frac{1}{A}}\right)=\frac{1}{\bar{A}}$,

(3) $(A\cdot B)+\overline{(A\cdot B)}=(B\cdot A)+\overline{(B\cdot A)}$,

(4) $(ABC)+\overline{(ABC)}=(BCA)+\overline{(BCA)}=(CAB)+\overline{(CAB)}$.

Nun setzen wir $\frac{A}{B}$ gleich der Quaternion $A\cdot\frac{1}{B}$, damit ergibt sich

(5) $\frac{(AC)}{(BC)}=\frac{A}{B}$,

(6) $\frac{1}{(CB)}(CA)=\frac{1}{B}\cdot A$.

Wenn $X'=AX\frac{1}{B}$, dann

$$x_0'=\frac{1}{B\bar{B}}[x_0(a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+x_1(a_0b_1-a_1b_0-a_2b_3+a_3b_2)$$
$$+x_2(a_0b_2-a_2b_0-a_3b_1+a_1b_3)+x_3(a_0b_3-a_3b_0+a_2b_1-a_1b_2)],$$
$$x_1'=\frac{1}{B\bar{B}}[x_0(a_1b_0-a_0b_1-a_2b_3+a_3b_2)+x_1(a_0b_0+a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3)$$
$$+x_2(-a_0b_3-a_3b_0+a_2b_1+a_1b_2)+x_3(a_0b_2+a_2b_0+a_3b_1+a_1b_3)],$$
$$x_2'=\frac{1}{B\bar{B}}[x_0(-a_0b_2+a_2b_0-a_3b_1+a_1b_3)+x_1(a_0b_3+a_3b_0+a_1b_2+a_2b_1)$$
$$+x_2(a_0b_0-a_1b_1+a_2b_2-a_3b_3)+x_3(-a_0b_1-a_1b_0+a_2b_3+a_3b_2)],$$
$$x_3'=\frac{1}{B\bar{B}}[x_0(-a_0b_3+a_3b_0-a_1b_2+a_2b_1)+x_1(-a_0b_2-a_2b_0+a_1b_3+a_3b_1)$$
$$+x_2(a_0b_1+a_1b_0+a_2b_3+a_3b_2)+x_2(a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2+a_3b_3)].$$

Wenn $A=B$ ist, ergibt sich

(7) $|X'|=|X|$, $X'+\bar{X}'=X+\bar{X}$, $|X-\bar{X}|=|X'-\bar{X}'|$.

Falls $X-\bar{X}=0$, dann

$$X'-\bar{X}'=0.$$

Nun definieren wir e^X folgendermassen

(8) $e^X\equiv 1+X+\frac{X^2}{2!}+\cdots\cdots$,

damit ergibt sich $Xe^X=e^XX$.

Sind X und Y zwei Funktionen einer komplexen Veränderlichen t, so erhält man

$$\frac{d}{dt}(X\cdot Y)=\frac{dX}{dt}\cdot Y+X\cdot\frac{dY}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{X}\right)=-\frac{1}{X}\,\frac{dX}{dt}\,\frac{1}{X}, \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}(e^X)=\frac{dX}{dt}\cdot e^X=e^X\frac{dX}{dt}.$$

Besteht für alle X die folgende Formel

$$A\bar{A}X\bar{X}+BX+\bar{X}\bar{B}+C\bar{C}=0,$$

so ist

$$A\bar{A}=B=C\bar{C}=0. \tag{10}$$

§ 2. Anordnung der gerichteten Kugeln mit den Quaternionen.

Einer gerichteten Kugel mit Halbmesser r, Mittelpunkt (x, y, z) (bei kartesischen orthogonalen Koordinaten) soll die Hyperquaternion X

$$X=x_0+x_1j_1+x_2j_2+x_3j_3;$$

$$x_0=ir,\ x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z,\ (i=\sqrt{-1})$$

entsprechen.

Sind X und Y zwei gerichtete Kugeln, so bedeutet

$$\sqrt{E}=\sqrt{(X-Y)(\bar{X}-\bar{Y})}=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2-(r-s)^2}$$

ihre gemeinsame Tangentenentfernung. $E=0$ ist die Bedingung für eine gleichsinnige Berührung zweier Kugeln.

§ 3. Die linearen Transformationen von Quaternionen.

Hier wollen wir die linearen Transformationen von Quaternionen, genau wie die von komplexen Zahlen, durch die Formel

$$X'=\frac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\delta},\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \text{ Hyperquaternionen})$$

mit $\Delta=\alpha\bar{\alpha}\delta\bar{\delta}-\alpha\bar{\gamma}\delta\bar{\beta}-\beta\bar{\delta}\gamma\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}\gamma\bar{\gamma}=$ eine komplexe Zahl $\neq 0$,

definieren. Sie bilden auch eine Gruppe von Transformationen, weil die Existenz der Einheitstransformation, der reziproken Transformation und des Produktes zweier Transformationen und das assoziative Gesetz folgendermassen bewiesen werden.

$X'=X$ ist die Einheitstransformation. Aus zwei Transformationen

$$T:\quad X'=\frac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\delta},\quad \Delta(\alpha, \beta, \gamma, \delta)\neq 0,$$

$$S:\quad X'=\frac{\alpha' X+\beta'}{\gamma' X+\delta'},\quad \Delta(\alpha', \beta', \gamma', \delta')\neq 0,$$

folgt

$$ST: \quad X' = \frac{\alpha' \dfrac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta} + \beta'}{\gamma' \dfrac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta} + \delta'}.$$

Nach § 1 (5)

$$X' = \frac{(\alpha'\alpha + \beta'\gamma)X + (\alpha'\beta + \beta'\delta)}{(\gamma'\alpha + \delta'\gamma)X + (\gamma'\beta + \delta'\delta)} = \frac{\alpha'' X + \beta''}{\gamma'' X + \delta''},$$

wo $$\Delta(\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta'') = \Delta(\alpha, \beta, \gamma, \delta)\Delta(\alpha', \beta', \gamma', \delta') \neq 0.$$

Also ist das Produkt auch eine Transformation vom Typus T, deshalb ist das Produkt von zwei linearen Transformationen wieder eine solche. Das assoziative Gesetz wird leicht bewiesen. Nun wenden wir uns zur Existenz der reziproken Transformation.

Für die Transformation T: $X' = \frac{1}{X}$, $\Delta = 1$, gilt die Reziproke T^{-1}: $X' = \frac{1}{X}$.

Für T: $X' = X + \beta$, $\Delta = 1$, T^{-1}: $X' = X - \beta$.

Für T: $X' = \alpha X$, $\Delta = \alpha\bar{\alpha} \neq 0$, T^{-1}: $X' = \frac{1}{\alpha} X$.

Die Transformation

$$T: \quad X' = \frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta},$$

mit $\gamma\bar{\gamma} \neq 0$ und $\Delta = \alpha\bar{\alpha}\delta\bar{\delta} - \alpha\bar{\beta}\delta\bar{\gamma} - \gamma\bar{\delta}\beta\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta}\gamma\bar{\gamma} = \gamma\bar{\gamma}\left(\beta - \alpha\frac{1}{\gamma}\delta\right)\overline{\left(\beta - \alpha\frac{1}{\gamma}\delta\right)} \neq 0$,

ist gleichwertig zu der Transformation

$$X' = \frac{\alpha X + \beta}{\delta X + \gamma} = \frac{\frac{\alpha}{\gamma}(\gamma X + \delta) + \left(\beta - \alpha\frac{1}{\gamma}\delta\right)}{\gamma X + \delta}.$$

Nach § 1 (5): $X' = \frac{\alpha}{\gamma} + \left(\beta - \alpha\frac{1}{\gamma}\delta\right)\frac{1}{\gamma X + \delta}$.

Und weil $\gamma\bar{\gamma} \neq 0$, $\Delta \neq 0$, ist T Produkt der Transformationen der Typen

$$X' = \alpha X, \quad \alpha\bar{\alpha} \neq 0$$

$$X' = \frac{1}{X},$$

$$X': \quad X + \beta.$$

Und zwar

$$T = T_5 T_4 T_3 T_2 T_1.$$

wobei $T_1: \quad X' = \gamma X, \quad \gamma\bar{\gamma} \neq 0,$

$T_2: \quad X' = X + \delta,$

$T_3: \quad X' = \frac{1}{X},$

$T_4: \quad X' = \left(\beta - \alpha\frac{1}{\gamma}\delta\right)X, \quad \left(\beta - \frac{\alpha}{\gamma}\delta\right)\overline{\left(\beta - \frac{\alpha}{\gamma}\delta\right)} \neq 0,$

$T_5: \quad X' = X + \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \gamma\bar{\gamma} \neq 0.$

Also $T^{-1} = T_1^{-1} T_2^{-1} T_3^{-1} T_4^{-1} T_5^{-1},$

wobei $T_5^{-1}: \quad X' = X - \frac{\alpha}{\gamma},$

$T_4^{-1}: \quad X' = \frac{1}{\left(\beta - \frac{\alpha}{\gamma}\delta\right)}X,$

$T_3^{-1}: \quad X' = \frac{1}{X},$

$T_2^{-1}: \quad X' = X - \delta,$

$T_1^{-1}: \quad X' = \frac{1}{\gamma}X.$

Oder
$$X' = \frac{\alpha' X + \beta'}{\gamma' X + \delta'} = \frac{1}{\gamma}\left\{\frac{1}{\frac{1}{\left(\beta - \frac{\alpha}{\gamma}\delta\right)}\left(X - \frac{\alpha}{\gamma}\right)} - \delta\right\}$$

$$= \frac{\left(-\frac{\frac{1}{\gamma}\delta}{\beta - \frac{\alpha}{\gamma}\delta}\right)X + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\frac{1}{\gamma}\delta}{\beta - \frac{\alpha}{\gamma}\delta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)}{\left(\frac{1}{\beta - \frac{\alpha}{\gamma}\delta}\right)X + \left(-\frac{1}{\beta - \frac{\alpha}{\gamma}\delta}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\right)}.$$

Wenn $\gamma\bar{\gamma} = 0$ aber $\delta\bar{\delta} \neq 0$, so wird die Transformation

$$T: \quad X' = \frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \gamma}, \quad \delta\bar{\delta} \neq 0, \quad \Delta \neq 0,$$

durch die Transformation $X = \frac{1}{X_1}$ in den obigen Fall gebracht.

Nämlich
$$X_1' = \frac{\alpha\frac{1}{X_1} + \beta}{\gamma\frac{1}{X_1} + \delta}$$

$$= \frac{\beta X_1 + \alpha}{\delta X_1 + \gamma}, \quad \delta\bar{\delta} \neq 0, \quad \Delta \neq 0.$$

Wenn $\alpha\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta} = \gamma\bar{\gamma} = \delta\bar{\delta} = 0$,

dann $\Delta = -(\alpha\bar{\gamma}\delta\bar{\beta} + \beta\bar{\delta}\gamma\bar{\alpha}) \neq 0$.

Die Transformation

$$T: \quad X' = \frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta}$$

kann, durch $X = X_1 + \varepsilon$ immer in die obigen Beispiele gebracht werden. Falls es nicht ausführbar ist, d. h. der Koeffizient δ' der Transformation

$$X' = \frac{\alpha' X_1 + \beta'}{\gamma' X_1 + \delta'} = \frac{\alpha X_1 + (\alpha\varepsilon + \beta)}{\gamma X_1 + (\gamma\varepsilon + \delta)}$$

immer Nullfaktor, so gilt

$$(\gamma\varepsilon + \delta)\overline{(\gamma\varepsilon + \delta)} = 0$$

oder $\gamma\bar{\gamma}\varepsilon\bar{\varepsilon} + \delta\bar{\gamma}\varepsilon + \bar{\varepsilon}\bar{\gamma}\delta + \delta\bar{\delta} = \bar{\delta}\gamma\varepsilon + \bar{\varepsilon}\bar{\gamma}\delta = 0$

für alle ε.

Aus § 1 (9) also $\bar{\delta}\gamma = 0$ und wir haben $\Delta = 0$. Es steht jedoch im Widerspruch mit der Voraussetzung $\Delta \neq 0$.

Nun ist die Existenz der reziproken Transformation unter der Bedingung $\Delta \neq 0$ völlig bewiesen worden.

Zum Schluss bilden die linearen Transformationen von Quaternionen (immer $\Delta \neq 0$) eine Gruppe von Transformationen, und sie sind Produkte der Transformationen

$$X' = \frac{1}{X},$$

$$X' = \alpha X, \quad \alpha\bar{\alpha} \neq 0,$$

$$X' = X + \beta.$$

Die linearen Transformationen und die Transformation $X' = X$ lassen die Bedingung $E \equiv (X - Y)\overline{(X - Y)} = 0$ invariant. Denn, für die Transformation $X' = \alpha X$, $\alpha\bar{\alpha} \neq 0$.

$$E' = \alpha\bar{\alpha}E;$$

für $X' = X$,

$$E' = E;$$

für $X' = X + \beta$,

$$E' \equiv E;$$

für $X' = \frac{1}{X}$,

$$E' = (X' - Y')\overline{(X' - Y')} = \frac{1}{(X\bar{X})^2 (Y\bar{Y})^2}(\bar{X}Y\bar{Y} - X\bar{X}\bar{Y})(XY\bar{Y} - Y X\bar{X})$$

$$= \frac{1}{(X\bar{X}Y\bar{Y})^2}\bar{Y}(Y - X)\bar{Y}Y\overline{(Y - X)}X$$

$$= \frac{1}{X\bar{X}\,Y\bar{Y}} E.$$

Also ist die Bedingung $E=0$ invariant unter den linearen Transformation und der Transformation $X'=\bar{X}$.

Anderseits ordnen die Lieschen Transformationen sich berührender Kugeln immer wieder ebensolchen zu, d. h. sie lassen die Bedingung

$$E\equiv(X-Y)(\bar{X}-\bar{Y})=0$$

invariant. Daraus ergibt sich, dass die linearen Transformationen ($\Delta\neq 0$) und $X'=\bar{X}$ eine Untergruppe der von Lie bilden. Später wollen wir sehen, dass sie wirklich die Transformationen von Lie sind.

§ 4. Transformationen von Möbius.

Hier suchen wir die Bedingungen, dass die linearen Transformationen und $X'=\bar{X}$ die von Möbius sind. Ihre charakteristischen Eigenschaften sind, dass sie eine Untergruppe der Lie-Gruppe bilden und einen Punkt ein-eindeutig wieder einem Punkte zuordnen. Die notwendigen Bedingungen sind also, dass $r=0$ oder $X+\bar{X}=0$, dann $X'+\bar{X}'=0$ und umgekehrt.

Oder rechnerisch

$$X'+\bar{X}'=\left(\frac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\delta}\right)+\left(\overline{\frac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\delta}}\right)$$

nach § 1 (1), (2), (5),

$$=\frac{(\alpha X+\beta)(\overline{\gamma X+\delta})}{(\gamma X+\delta)(\overline{\gamma X+\delta})}+\frac{1}{(\gamma X+\delta)(\overline{\gamma X+\delta})}(\gamma X+\delta)(\overline{\alpha X+\beta})$$

$$=\frac{1}{(\gamma X+\delta)(\overline{\gamma X+\delta})}[\alpha\bar{\gamma}+\gamma\bar{\alpha})X\bar{X}+(\alpha X\bar{\delta}+\delta\bar{X}\bar{\alpha})+(\beta\bar{X}\bar{\gamma}+\gamma X\bar{\beta})$$
$$+(\beta\bar{\delta}+\delta\bar{\beta})]=0.$$

Und diese Gleichung ist gültig für jedes X, das $X+\bar{X}=0$ erfüllt. Setzt man $X=0$, so erhält man

$$\beta\bar{\delta}+\delta\bar{\beta}=0,$$

bei $X\bar{X}\to\infty$, wird $\alpha\bar{\gamma}+\gamma\bar{\alpha}=0$.

Und der Zähler wird

$$(\alpha X\bar{\delta}+\delta\bar{X}\bar{\alpha})+(\beta\bar{X}\bar{\gamma}+\gamma X\bar{\beta})=0$$

oder, nach § 1 (2),

$$(\bar{\delta}\alpha+\bar{\beta}\gamma)X+\bar{X}(\bar{\alpha}\delta+\bar{\gamma}\beta)=0.$$

Diese Formel gilt für alle X, die die Gleichung $X+\bar{X}=0$ erfüllen, deshalb muss $\bar{\delta}\alpha+\bar{\beta}\gamma$ eine komplexe Zahl sein.

Die notwendigen Bedingungen sind

$$\beta\bar{\delta}+\delta\bar{\beta}=0,$$

(1) $\alpha\bar{\gamma}+\gamma\bar{\alpha}=0,$
$(\bar{\delta}\alpha+\bar{\beta}\gamma)-(\bar{\alpha}\delta+\bar{\gamma}\beta)=0.$

Sie sind ausreichend.

1) Wenn $\alpha\bar{\alpha}=\gamma\bar{\gamma}=0$, so kann man die gegebene Transformation $X'=\frac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\delta}$ mit Bedingungen (1) durch die Transformation

$$X'=X_1'+\varepsilon,\quad \varepsilon+\bar{\varepsilon}=0$$

in die Transformation $X_1'=\frac{\alpha' X+\beta'}{\gamma' X+\delta'}$

dessen Koeffizient α' kein Nullfaktor ist, bringen.

Denn, wenn es unmöglich ist d. h. $(\alpha-\varepsilon\gamma)(\alpha-\overline{\varepsilon\gamma})=0$

oder
$$\begin{aligned}&\alpha\bar{\alpha}-\alpha\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}-\varepsilon\gamma\bar{\alpha}+\varepsilon\bar{\varepsilon}\gamma\bar{\gamma}\\&=-(\alpha\bar{\gamma}\bar{\varepsilon}+\varepsilon\gamma\bar{\alpha})\\&=0\end{aligned}$$

für alle ε, welche $\varepsilon+\bar{\varepsilon}=0$ erfüllen, so ist es notwendig, dass $\alpha\bar{\gamma}$ eine komplexe Zahl ist.

Aber aus (1) folgt $\alpha\gamma=0$ und dann $\Delta=0$.

Allerdings ist es ein Widerspruch, α' also kein Nullfaktor. Daraufhin kann man durch die Transformation $X'=\frac{1}{X}$ die gegebenen Transformation in eine Transformation, deren Koeffizient γ kein Nullfaktor ist, bringen.

Die gegebene Transformation kann durch die obigen Transformationen

$$X'=\frac{1}{X};\quad X'=X+\beta,\quad \beta+\bar{\beta}=0,$$

zu
$$X'=\frac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\delta},\quad \gamma\bar{\gamma}\pm 0,$$

transformiert werden.

Nun wollen wir beweisen, dass (1), $\gamma\bar{\gamma}\neq 0$ gesetzt, auch die hinreichenden Bedingungen sind.

Wenn $\gamma\bar{\gamma}\neq 0,\quad \delta\bar{\delta}=0,$

so werden die Bedingungen

$$\alpha\bar{\gamma}+\gamma\bar{\alpha}=0,$$
$$\bar{\beta}\gamma-\bar{\gamma}\beta=0,$$

oder
$$\frac{\alpha}{\gamma}+\left(\frac{\bar{\alpha}}{\gamma}\right)=0$$
$$\beta=r\gamma\qquad (r\text{; eine komplexe Zahl}),$$

und
$$X'=\frac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\delta}$$

$$= \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{r\gamma}{\gamma X}$$

$$= p + r\gamma \frac{1}{X} \frac{1}{\gamma} \qquad (p + \bar{p} = 0).$$

Diese linearen Transformationen mit den Bedingungen (1) sind die Produkte folgender Transformationen:

i) $X' = \bar{X}$

ii) $X' = \frac{1}{\bar{X}}$

iii) $X' = \gamma X \frac{1}{\gamma}$

iv) $X' = rX \quad (r - \bar{r} = 0)$

v) $X' = X + p \quad (p + \bar{p} = 0).$

X als einen Punkt angesehen, ergibt ii) die Inversion in Bezug auf die Einheitskugel.

Denn $$X' = \frac{1}{\bar{X}} = \frac{X}{X\bar{X}} = \frac{x_2 + j_1 x_1 + j_2 x_2 + j_3 x_3}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

oder, wenn $x_0 = 0$, dann

$$x_0 = 0$$

$$x_1' = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$x_2' = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$x_3' = \frac{x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Daraus folgt, dass die Transformation $X' = \frac{1}{X}$ die Inversion in Bezug auf die Einheitskugel ist.

i) die Spiegelungen in Bezug auf die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ untereinander.

iii) die Drehung um den Anfangspunkt.

iv) die Vergrösserung, weil $r - \bar{r} = 0$.

v) die Schiebung, weil $p + \bar{p} = 0$.

2) Wenn $\gamma\bar{\gamma} \neq 0$, $\delta\bar{\delta} \neq 0$,

dann $$\Delta = \gamma\bar{\gamma}\left(\beta - \alpha \frac{1}{\gamma} \delta\right)\overline{\left(\beta - \alpha \frac{1}{\gamma} \delta\right)} \neq 0$$

und $$X' = \frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta}$$

$$= \frac{\frac{\alpha}{\gamma}(\gamma X + \delta) + \left(\beta - \alpha \frac{1}{\gamma} \delta\right)}{\gamma X + \delta}$$

$$= \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma \frac{1}{\gamma}\left(\beta - \alpha \frac{1}{\gamma}\delta\right)}{\gamma\left(X + \frac{1}{\gamma}\delta\right)}$$

$$= \frac{\alpha}{\gamma} + \gamma\left\{\frac{1}{\gamma}\left(\beta - \alpha\frac{1}{\gamma}\delta\right)\right\}\frac{1}{X + \frac{1}{\gamma}\delta}\,\frac{1}{\gamma}.$$

Später wollen wir beweisen

$$\frac{1}{\gamma}\delta + \bar{\delta}\frac{1}{\bar{\gamma}} = 0, \quad \frac{1}{\gamma}\left(\beta - \alpha\frac{1}{\gamma}\delta\right) - \overline{\left(\beta - \alpha\frac{1}{\gamma}\delta\right)}\frac{1}{\bar{\gamma}} = 0.$$

Also ist die Transformation das Produkt folgender Transformationen

i) $X' = X + \beta'$

ii) $X' = \frac{1}{X}$

iii) $X' = \bar{X}$

iv) $X' = \gamma X \frac{1}{\gamma}$

v) $X' = \alpha' X$

vi) $X' = X + \beta''$,

wo $\beta' = \frac{1}{\gamma}\delta, \quad \beta'' = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \alpha' = \frac{1}{\gamma}\left(\beta - \frac{\alpha}{\gamma}\delta\right)$

und $\beta' + \bar{\beta}' = 0, \quad \beta'' + \bar{\beta}'' = 0$ (aus (1)), $\alpha' - \bar{\alpha}' = 0$.

i), ii), iii), iv), v), vi) sind die Transformationen. die wir schon erwähnt haben. Und die Transformationen $X' = X_1 + \varepsilon$, $X' = \frac{1}{X}$, die wir um die Transformation $X' = \frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta}$ mit $\gamma\bar{\gamma} \neq 0$ zu erhalten, benutzt haben, gehören diesen Transformationen an.

Nun ergibt sich, dass die linearen Transformationen mit den Bedingungen (1) und die Transformation $X = \bar{X}$ die Produkte von Schiebung, Drehung, Vergrösserung und Inversion, nämlich die Transformationen von Möbius sind.

Die Formeln

$$\beta' + \bar{\beta}' = 0, \quad \alpha' - \bar{\alpha}' = 0$$

die wir angenommen haben, werden folgendermassen bewiesen. Die reziproke Transformation von $X' = \frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta}$ ist, wie wir schon gesehen haben

$$X' = \frac{-\frac{1}{\gamma}\delta r' X + \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\delta r' \frac{\alpha}{\gamma}\right)}{r' X - r' \frac{\alpha}{\gamma}},$$

wobei $r' = \frac{1}{\left(\beta - \frac{\alpha}{\gamma}\delta\right)}$.

Wendet man die Bedingungen (1), und zwar $\alpha\bar{\gamma} + \gamma\bar{\alpha} = 0$, auf diese Transformation an, so ergibt sich

$$\left(-\frac{1}{\gamma}\delta r'\bar{r}'\right) + \left(-r'\bar{r}'\bar{\delta}\frac{1}{\bar{\gamma}}\right) = 0.$$

$$-(r'\bar{r}')\left(\frac{1}{\gamma}\delta + \bar{\delta}\frac{1}{\bar{\gamma}}\right) = 0.$$

Also $\bar{\beta}' + \beta' = 0$.

Zweitens aus

$$(\bar{\delta}\alpha + \bar{\beta}\gamma) - (\bar{\alpha}\delta + \bar{\gamma}\beta)$$

$$= (\gamma\bar{\gamma})\left[\left(\frac{1}{\gamma}\beta + \bar{\alpha}\frac{1}{\bar{\gamma}}\frac{1}{\gamma}\delta\right) - \left(\bar{\beta}\frac{1}{\bar{\gamma}} + \bar{\delta}\frac{1}{\bar{\gamma}}\frac{1}{\gamma}\alpha\right)\right] = 0.$$

Andrerseits,

aus $\alpha\bar{\gamma} + \gamma\bar{\alpha} = 0$,

$$\gamma\bar{\gamma}\left\{\frac{\alpha}{\gamma} + \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)\right\}$$

$$= (\gamma\bar{\gamma})\left(\frac{1}{\gamma}\alpha + \bar{\alpha}\frac{1}{\bar{\gamma}}\right) \quad \text{(nach § 1 (3))}$$

$$= 0.$$

Deshalb $\left(\frac{1}{\gamma}\beta + \bar{\alpha}\frac{1}{\bar{\gamma}}\gamma\delta\right) - \left(\bar{\beta}\frac{1}{\bar{\gamma}} + \bar{\delta}\frac{1}{\delta}\frac{1}{\gamma}\alpha\right)$

$$= \left(\frac{1}{\gamma}\beta - \frac{1}{\gamma}\alpha\frac{1}{\gamma}\delta\right) - \left(\bar{\beta}\frac{1}{\bar{\gamma}} - \bar{\delta}\frac{1}{\bar{\gamma}}\bar{\alpha}\frac{1}{\bar{\gamma}}\right)$$

$$= 0$$

Also $\alpha' - \bar{\alpha}' = 0$.

Damit ist der Satz völlig bewiesen worden. *Kurz sind die linearen Transformationen* $X' = \frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta}$ (immer $\Delta \neq 0$) *und die Transformation* $X' = \bar{X}$ *mit den Bedingungen*

$$\beta\bar{\delta} + \delta\bar{\beta} = 0$$

(1) $$\alpha\bar{\gamma} + \gamma\bar{\alpha} = 0$$

$$(\bar{\delta}\alpha + \bar{\beta}\gamma) - (\bar{\alpha}\delta + \bar{\gamma}\beta) = 0.$$

identisch mit den Transformationen von Möbius. (enthaltend die imaginären Transformationen)

Um nur die reellen Transformationen zu behandeln, wenn x_0 immer eine rein komplexe und x_1, x_2, x_3 drei reelle Zahlen behandeln, dann sind für die Transformationen

$$X' = aX, \quad (a - \bar{a} = 0)$$
$$X' = X + \delta, \quad (\delta + \bar{\delta} = 0)$$
$$X' = \frac{1}{\bar{X}}$$
$$X' = \bar{X}$$
$$X' = \gamma X \frac{1}{\gamma}$$

a, γ, δ als ordinäre Quaternionen (nicht Hyperquaternionen) Bedingung.

§ 5. Transformationen von Laguerre.

Nun wollen wir die Transformationen von Laguerre untersuchen. Denken wir die linearen Transformationen

$$X' = \frac{aX + \beta}{\delta}, \quad (a\bar{a} = \delta\bar{\delta})$$
$$X' = \bar{X},$$

wobei $\Delta = a\bar{a}\delta\bar{\delta} \neq 0$,

so sind sie die Produkte der folgenden Transformationen

$$X' = \frac{aX}{\delta}, \quad (a\bar{a} = \delta\bar{\delta} \neq 0)$$
$$X' = X + \beta,$$
$$X' = \bar{X}.$$

Wie man leicht beweisen kann, ist die Tangentenentfernung zweier gerichteter Kugeln, $E = (X_1 - X_2)\overline{(X_1 - X_2)}$ eine Invariante; deshalb bilden die Transformationen eine Untergruppe der Laguerreschen. Nach der Lieschen Methode von der Minimalprojektion sind die Transformationen von Laguerre den Bewegungen im vierdimensionalen, euklidischen Raum mit den Veränderlichen, $x_0 = ir$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ gleichwertig.

Anderseits ist die Transformation

$$X' = \frac{aX}{\delta} \quad (a\bar{a} = \delta\bar{\delta})$$

die Drehung um den Anfangspunkt, und

$$X' = X + \beta$$

die Schiebung im vierdimensionalen Raum. Somit sind die Transformationen:

$$X' = \frac{aX}{\delta}, \quad (a\bar{a} = \delta\bar{\delta} \neq 0)$$

$$X' = X + {}_i\beta,$$
$$X' = \bar{X}$$

die Transformationen von Laguerre (enthaltend die imaginären).

Um nur die reellen Transformationen zu behandeln, d. h. ix_0, x_1, x_2, x_3 immer reelle Zahlen, sind folgende Bedingungen erforderlich:

$${}_i\beta_0,\ {}_i\beta_1,\ {}_i\beta_2,\ {}_i\beta_3 = \text{reelle Zahlen},\quad \alpha = \pm\hat{\delta}.$$

(Das Zeichen $\wedge$ bedeutet, dass $\hat{\alpha}$ dem α konjugiert in Bezug auf die imaginären Einheit i, nicht j_1, j_2, j_3 ist.)

Die Bedingungen für ${}_i\beta$ kann man leicht beweisen, die für $\alpha = \pm\hat{\delta}$ erhalten wir folgendermassen.

Erstens

$$X' = \frac{\alpha X}{\delta} \qquad (\alpha\bar{\alpha} = \delta\bar{\delta})$$

$$= \frac{\alpha}{(\delta\bar{\delta})} X \frac{1}{\frac{\delta}{(\delta\bar{\delta})}}$$

$$= \alpha' X \frac{1}{\delta'},$$

wo
$$\alpha' = \frac{\alpha}{\delta\bar{\delta}} = \frac{\alpha}{\alpha\bar{\alpha}}$$

$$\delta' = \frac{\delta}{\delta\bar{\delta}}$$

und
$$\delta'\bar{\delta}' = \alpha'\bar{\alpha}' = 1.$$

Wir können also für die Transformation $X' = \alpha X \frac{1}{\delta}$, $(\alpha\bar{\alpha} = \delta\bar{\delta})$ $\alpha\bar{\alpha} = \delta\bar{\delta} = 1$ annehmen.

Rechnet man die Formel $X' = \alpha X \frac{1}{\delta}$

so ergibt sich, nach § 1 (5):

i) $\alpha_0\delta_0 + \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2 + \alpha_3\delta_3$, $\quad \alpha_0\delta_0 + \alpha_1\delta_1 - \alpha_2\delta_2 - \alpha_3\delta_3$,
$\alpha_0\delta_0 + \alpha_2\delta_2 - \alpha_3\delta_3 - \alpha_1\delta_1$, $\quad \alpha_0\delta_0 + \alpha_3\delta_3 - \alpha_1\delta_1 - \alpha_2\delta_2$

reell;

ii) $\alpha_0\delta_1 - \alpha_1\delta_0 - \alpha_2\delta_3 + \alpha_3\delta_2$, $\quad \alpha_0\delta_2 - \alpha_2\delta_0 - \alpha_3\delta_1 + \alpha_1\delta_3$,
$\alpha_0\delta_3 - \alpha_3\delta_0 + \alpha_2\delta_1 - \alpha_1\delta_2$, $\quad \alpha_1\delta_0 - \alpha_0\delta_1 - \alpha_2\delta_3 + \alpha_3\delta_2$

rein imaginär;

iii) $-\alpha_0\delta_3 - \alpha_3\delta_0 + \alpha_2\delta_1 + \alpha_1\delta_2$, $\quad \alpha_0\delta_2 + \alpha_2\delta_0 + \alpha_3\delta_1 + \alpha_1\delta_3$,
$\alpha_1\delta_2 + \alpha_2\delta_1 + \alpha_3\delta_0 + \alpha_0\delta_3$, $\quad \alpha_3\delta_2 - \alpha_1\delta_0 - \alpha_0\delta_1 + \alpha_2\delta_3$,
$\alpha_1\delta_3 - \alpha_2\delta_0 - \alpha_0\delta_2 + \alpha_3\delta_1$, $\quad \alpha_2\delta_3 + \alpha_1\delta_0 + \alpha_3\delta_2 + \alpha_0\delta_1$

reell.

Aus i) folgt, dass $\alpha_0\delta_0$, $\alpha_1\delta_1$, $\alpha_2\delta_2$, $\alpha_3\delta_3$ reell sind, oder

$$\alpha_i = r_i \hat{\delta}_i \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

wobei r_i reelle Zahlen sind.

Aus ii) folgt, dass

$$\alpha_1\delta_1 - \alpha_1\delta_0, \quad \alpha_0\delta_2 - \alpha_2\delta_0, \quad \alpha_0\delta_3 - \alpha_3\delta_0,$$
$$\alpha_2\delta_3 - \alpha_3\delta_2, \quad \alpha_3\delta_1 - \alpha_1\delta_3, \quad \alpha_1\delta_2 - \alpha_2\delta_1$$

rein imaginär sind.

Aus iii) ergibt sich, dass

$$\alpha_0\delta_1 + \alpha_1\delta_0, \quad \alpha_0\delta_2 + \alpha_2\delta_0, \quad \alpha_0\delta_3 + \alpha_3\delta_0,$$
$$\alpha_2\delta_3 + \alpha_3\delta_2, \quad \alpha_3\delta_1 + \alpha_1\delta_3, \quad \alpha_1\delta_2 + \alpha_2\delta_1$$

reell sind.

Also sind $r_i\hat{\delta}_j\delta_i - r_j\hat{\delta}_i\delta_j$ u. s. w. rein imaginär, $r_i\hat{\delta}_i\delta_j + r_j\hat{r}_j\cdot\delta_i$ u. s. w. reell. Daraus folgt, dass $r_0 = r_1 = r_2 = r_3$ oder $\alpha_i = r\hat{\delta}_i$.

Andrerseits

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1,$$
$$\delta_0^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 = 1$$

und $$1 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = r^2(\delta_0^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2) = r^2$$

oder $$r = \pm 1.$$

Daraus folgt $\alpha = \pm\hat{\delta}$.

§ 6. Transformationen von Lie.

Wir haben schon im § 3 bemerkt, dass die linearen Transformation

$$X' = \frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta}, \quad (\Delta \neq 0)$$

aus den Transformationen

$$X' = \alpha X \ (\alpha\alpha \neq 0), \quad X' = X + \beta, \quad X' = \frac{1}{X}$$

bestehen.

Die Transformation $X' = \alpha X$ ist das Produkt folgender Transformationen

i) $X' = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}}\, X$

ii) $X' = \alpha X \frac{1}{\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}}$.

i) ist eine Transformation von Möbius und ii) eine von Laguerre. Deshalb bestehen die Transformationen aus den Transformationen

i) $X' = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}}\, X \quad (\alpha\bar{\alpha} \neq 0)$,

ii) $X' = \alpha X \frac{1}{\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}} \quad (\alpha\bar{\alpha} \neq 0)$,

iii) $X' = X + \beta$,

iv) $X' = \bar{X}$,

v) $X' = \frac{1}{\bar{X}}$.

Andrerseits besteht das Produkt der Gruppen von Möbius und von Laguerre aus den Transformationen

i)′ $X'=\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}\,X \quad (\alpha\bar{\alpha}\neq 0)$,

ii)′ $X'=\alpha X\frac{1}{\delta} \quad (\alpha\bar{\alpha}=\delta\bar{\delta}\neq 0)$,

iii)′ $X'=X+\beta$

iv)′ $X'=\bar{X}$

v)′ $X'=\frac{1}{\bar{X}}$

Aber ii)′ wird folgendermassen geschrieben

$$X'=\alpha X\frac{1}{\delta}, \quad (\alpha\bar{\alpha}=\delta\bar{\delta}\neq 0)$$

$$=\alpha X\frac{1}{\alpha\bar{\alpha}}\delta\bar{\delta}\frac{1}{\delta}$$

$$=\delta\bar{\delta}\alpha X\frac{1}{\alpha\alpha}\frac{1}{\delta}$$

$$=\left\{\delta\left(\alpha X\frac{1}{\alpha\bar{\alpha}}\right)^{-1}\frac{1}{\delta\bar{\delta}}\right\}^{-1}.$$

Es ist das Produkt von den Transformationen der Typen $X'=\alpha X\frac{1}{\alpha\bar{\alpha}}$, $X'=\frac{1}{X}$. Daraus folgt, dass die Gruppe von i), ii), iii), iv), v) mit der von i)′, ii)′, iii)′, iv)′, v)′, identisch ist, d. h. dass die linearen Transformationen und die Transformation $X'=\bar{X}$ das Produkt von Möbius'schen und von Laguerre'schen Transformationen sind.

Also bilden die linearen Transformationen

$$X'=\frac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\delta} \quad (\Delta\equiv\alpha\bar{\alpha}\delta\bar{\delta}+\beta\bar{\beta}\gamma\bar{\gamma}-\bar{\alpha}\beta\bar{\delta}\gamma-\bar{\gamma}\delta\bar{\beta}\alpha\neq 0)$$

und $X'=\bar{X}$

die Transformationen von Lie (imaginäre Transformationen einschliesslich).

Um nur reelle Transformationen zu behandeln, müssen sie folgendermassen sein:

$X'=\alpha X$ (α=reelle Zahl, $\alpha=0$),

$X'=X+\beta$ ($i\beta_0$, β_1, β_2, β_3: reelle Zahlen),

$X'=\alpha X\frac{1}{\delta}$ ($\alpha=\delta\bar{\delta}$),

$X'=\frac{1}{\bar{X}}$,

$X'=\bar{X}$.

Später behandeln wir allgemein nicht nur die reellen sondern auch die imaginären Transformationen.

So entsteht der Satz, dass wir einander nicht berührende Kugeln in allgemeiner Lage durch die Transformationen von Lie in vier Punkte auf einer Ebene transformieren können.

Die lineare Transformation

$$X' = j_1 \frac{(X_3 - X_1)(X - X_2)}{(X_3 - X_2)(X - X_1)}$$

bringt die drei Kugeln $X = X_1, X_2, X_3$ in die Punkte auf der x Achse $X' = \infty$, (der uneigentliche Punkt), o, j_1. Die Transformation jedoch ist das Produkt folgender Transformationen

$$X' = X - X_1,$$
$$X' = \frac{1}{X},$$
$$X' = (X_1 - X_2)X,$$
$$X' = 1 + X,$$
$$X' = \frac{X_3 - X_1}{X_3 - X_2} X.$$

Andrerseits nach der vorigen Annahme, dass die drei Kugeln einander nicht berühren, sind die Koeffizienten obiger Transformationen $(X_1 - X_2)$, $(X_3 - X_1)$, $(X_3 - X_2)$ kein Nullfaktor, d. h. $(X_1 - X_2)(\overline{X_1 - X_2}) \neq 0$, $(X_3 - X_1)(\overline{X_3 - X_1}) = 0$, $(X_3 - X_2)(\overline{X_3 - X_2}) \neq 0$. Die obige Transformation ist wirklich die von Lie. Weiter bringt die Transformation

$$X' = j_1 a j_1 X \frac{1}{a}$$

die Punkte $X = \infty, o, j_1$ in sich selbst. Es ist leicht bewiesen, dass die vierte Kugel, bei geeigneter Wahl von a, einem Punkte auf der xy Ebene entspricht. *Also kann man vier einander nicht berührende Kugeln durch die Transformation von Lie in vier Punkte auf einer Ebene verwandeln.* Weil drei beliebige, einander nicht berührende Kugeln, wie wir oben gesehen haben, durch eine Transformation von Lie in die Punkte $x = \infty, o, j$, verwandelt werden, erhält man den Satz: *Ein System von einander nicht berührenden Kugeln wird immer durch eine Transformation von Lie in ein anderes beliebiges System von denselben Eigenschaften verwandelt.*

Nun wenden wir uns zur ein-parametrigen kontinuierenden Gruppe von Lie. In der Ebene hat die projektive Transformation, welche einen Kegelschnitt invariant lässt, im allgemeinen drei verschiedene invariante Punkte, von denen zwei auf dem Kegelschnitt liegen. Dieser Satz wird

leicht im mehrdimensionalen Raum erweitert, und es folgt, dass die projektive Transformation, die eine Hyperfläche zweiter Ordnung invariant lässt, im allgemeinen zwei verschiedene invariante Punkte auf der Hyperfläche hat. Im speziellen Fall fallen die zwei invarianten Punkte zusammen. So erhält man, dass die Transformation von Lie im allgemeinen zwei verschiedene Kugeln invariant lässt, weil die Kugeln nach den hexasphärischen Koordinaten den Punkten auf einer Hyperfläche zweiter Ordnung im fünf-dimensionalen Raum entsprechen und die Transformationen von Lie mit den Projektiven Transformationen, welche die Hyperfläche invariant lassen, identisch sind.

Wählt man die zwei invarianten Kugeln als den Anfangs- und den uneigentlichen Punkt, weil, wie schon erwähnt, vier Kugeln in vier Punkte einer Ebene transformiert werden können, so gilt für die Transformation von Lie, welch diese zwei Punkte invariant lässt, die folgende Formel-Definition : $X' = \frac{\alpha X}{\delta}$.

Um die ein-parametrige kontinuierende Gruppe von dur Form $X' = \frac{\alpha X}{\delta}$ zu erhalten, betrachten wir α, δ als die Funktionen einer komplexen Veränderlichen t.

Danach wird laut § 1 (8)

$$\begin{aligned}\frac{dX'}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\alpha X \frac{1}{\delta}\right)\\ &= \frac{d\alpha}{dt} X \frac{1}{\delta} - \alpha X \frac{1}{\delta}\frac{d\delta}{dt}\frac{1}{\delta}\\ &= \frac{d\alpha}{dt}\frac{1}{\alpha} X'\delta \frac{1}{\delta} - \alpha \frac{1}{\alpha} X'\delta \frac{1}{\delta}\frac{d\delta}{dt}\frac{1}{\delta}\\ &= \frac{d\alpha}{dt}\frac{1}{\alpha} X' - X'\frac{d\delta}{dt}\frac{1}{\delta}.\end{aligned}$$

Andrerseits folgt, nach dem Satz von der kontinuierenden Gruppe, bei geeigneter Wahl für Parameter t, dass die rechte Seite nur die Funktion von X' wird.

Deshalb

$$\frac{d^2X'}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{1}{\alpha}\right)X' - X'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\delta}{dt}\frac{1}{\delta}\right) = 0.$$

Diese Formel ist eine Identität für X'; also ergibt sich, dass $\frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\delta}{dt}\frac{1}{\delta}\right)$ eine komplexe Zahl $= \frac{dK}{dt}$, wo K eine komplexe Funktion von t ist.

Daraus folgt, dass

$$\frac{da}{dt}\frac{1}{a}=K+A,$$

wobei A eine konstante Quaternion ist.

Oder nach § 1 (8)

$$a=e^{\int K(t)dt+At}\cdot B,$$

wo B eine konstante Quaternion ist.

Also $\quad a=K'e^{At}\cdot B,\quad K'=e^{\int Kdt}$

Ähnlich haben wir $\quad \delta=K'e^{Ct}\cdot D$

Also $\quad X'=K'e^{At}BX\frac{1}{K'e^{Ct}\cdot D}$

$$=e^{At}BX\frac{1}{D}\frac{1}{e^{Ct}}.$$

Ist t jedoch so bestimmt, dass $X'=X$ für $t=0$, so gilt $X=BX\frac{1}{D}$ für alle X.

Deshalb $B=D=$eine komplexe Zahl.

Also wird die Transformation

$$X'=e^{At}Xe^{Bt},$$

in der A, B zwei konstante Quaternionen darstellen.

Nun setzen wir

$$A=a_0+a_1j_1+a_2j_2+a_3j_3, \qquad B=b_0+b_1j_1+b_2j_2+b_3j_3,$$
$$A'=a_1j_1+a_2j_2+a_3j_3, \qquad B'=b_1j_1+b_2j_2+b_3j_3,$$

und erhalten:

$$X'=e^{At}Xe^{Bt}=e^{(a_0+b_0)t}e^{A't}Xe^{B't}.$$

Dann nehmen wir eine Koordinatentransformation vor, welch ebenfalls den Anfangs- und den uneigentlichen Punkt invariant lässt.

Und zwar:

$$X=CYD,\quad X'=CY'D$$

und man hat

$$Y'=e^{(a_0+b_0)t}C^{-1}e^{A't}CYDe^{B't}D^{-1}.$$

Andrerseits

$$A_1=a_1j_1+a_2j_2+a_3j_3$$
$$=\frac{a_1j_1+a_2j_2+a_3j_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$
$$=j|A'|,$$

wo $\quad j=\frac{a_2j_1+a_2j_2+a_3j_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$

Nach § 1 (7) und $j^2=-1$,

$$e^{A'}=e^{j|A'|}=\cos|A'|+j\sin|A'|$$

und $C^{-1}\epsilon^{A't}C=\cos\{|A'|t\}+\sin\{|A'|t\}C^{-1}jC.$

$C^{-1}jC$ ist eine Drehung um den Anfangspunkt im Raum, und $jj=1$. Daher können wir, bei geeigneter Wahl von C, j mit j_1 gleichsetzen, woraus folgt, dass

$$C^{-1}\epsilon^{A't}C=\epsilon^{|A'|tj_1},$$

ähnlich $D^{-1}\epsilon^{B't}D=\epsilon^{|B'|tj_1}.$

Also $Y'=\epsilon^{(a_0+b_0)t}\epsilon^{|A|tj_1}Y\epsilon^{|B'|tj_1}.$

Oder kurz $X'=\epsilon^{ct}\epsilon^{atj_1}\times\epsilon^{btj_1},$

wo a, b, c=drei konstante komplexe Zahlen.

Wenn man X als eine konstante annimmt und t verändert, so erhält man eine W-Kugelschar, d. h. eine Schar, welche durch eine ein-parametrige lineare Transformation in sich übergeführt wird. Es wird leicht bewiesen, dass die Schar durch eine geeignete lineare Transformation in die Form $X'=\epsilon^{At}$ gebracht wird, wo $A=a_0+a_1j_1+a_2j_2+a_3j_3$. *Nun setzt man* $a_0t=S$ *und erhält so ihre kanonische Form*

$$X'=\epsilon^{BS}, \quad \text{wo} \quad B=1+b_1j_1+b_2j_2+b_3j_3.$$

§ 7. Doppelverhältnis.

Nun definieren wir das Doppelverhältnis von vier Kugeln folgendermassen

$$D\equiv(X_1, X_2; X_3, X_4)\equiv(X_1-X_3)\frac{1}{(X_1-X_4)}(X_2-X_4)\frac{1}{(X_2-X_3)}.$$

Wenn X_1 und X_4 oder X_2 und X_3 aneinander berühren, so

$$(X_1-X_4)(\overline{X_1-X_4})=0 \quad \text{und} \quad (X_2-X_3)(\overline{X_2-X_3})=0,$$

und die Division ist unmöglich. Später wollen wir diesen Fall ständig ausschliessen.

Satz: $D+\bar{D}$, $D\bar{D}$ *sind die Invarianten unter den Transformationen von Lie, deshalb ist* $(D-\bar{D})(\bar{D}-D)$ *auch eine Invariante.*

Beweis:

Für die Transformationen

$$X'=X+A,$$
$$X'=XB \text{ (nicht } BX) \quad (B\bar{B}\neq 0),$$
$$X'=X$$

ist dieser Satz leicht zu beweisen.

Für die Transformation

$$X'=\frac{1}{X}$$

$$D'=(X_1', X_2'; X_3', X_4')$$
$$=\left(\frac{1}{X_1}-\frac{1}{X_3}\right)\frac{1}{\left(\frac{1}{X_1}-\frac{1}{X_4}\right)}\left(\frac{1}{X_2}-\frac{1}{X_4}\right)\frac{1}{\left(\frac{1}{X_2}-\frac{1}{X_3}\right)}$$

$$= \bar{X}_3(X_3 - X_1)\bar{X}_1 \frac{1}{\bar{X}_1(X_4 - X_1)\bar{X}_1} \bar{X}_1(X_4 - X_2)\bar{X}_2 \frac{1}{\bar{X}_2(X_3 - X_2)\bar{X}_2},$$

nach § 1 (5)

$$D' = \bar{X}_3(X_1 - X_3)\frac{1}{(X_1 - X_4)}(X_2 - X_4)\frac{1}{(X_2 - X_3)}\frac{1}{\bar{X}_3} = \bar{X}_3 D \frac{1}{\bar{X}_3}.$$

Daraus erhält man, dass $D'\bar{D}' = D\bar{D}$ und nach § 1 (6) $D' + \bar{D}' = D + \bar{D}$. Daraus folgt die Invarianz der Formel $(D - \bar{D})(\bar{D} - D)$ ohne weiteres. Weil die obige Transformation $X' = XB$ das Produkt der Transformationen $X' = \frac{1}{X}$, $X' = \frac{1}{B}X$, $X' = \frac{1}{X}$ ist, kann man die Invarianz obiger drei Formeln für die Transformation $X' = \frac{1}{B}X$ beweisen. Und die Transformationen von Lie sind die Produkte der Transformationen

$$X' = X, \quad X' = BX, \quad X' = X + A, \quad X' = \frac{1}{X}.$$

Damit ist der Satz völlig bewiesen worden.

In § 6 haben wir schon gesehen, dass man vier einander nicht berührende Kugeln in vier Punkte auf einer Ebene transformieren kann. Liegen die vier Punkte auf der xy Ebene, so erhält man die Punkte mit den Koordinaten

$$X^i = x_1^i j_1 + x_2^i j_2, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

und

$$D = \{(x_1^1 j_1 + x_2^1 j_2) - (x_1^3 j_1 + x_2^3 j_2)\} \frac{1}{\{(x_1^1 j_1 + x_2^1 j_2) - (x_1^3 j_1 + x_2^3 j_2)\}} \cdots\cdots.$$

Multipliziert man j_1 Zähler und Nenner, so

$$(1) \qquad D = \{(x_1^1 + x_2^1 j_3) - (x_1^3 + x_2^3 j_3)\} \frac{1}{\{(x_1^1 + x_2^1 j_3) - (x_1^3 + x_2^3 j_3)\}} \cdots.$$

Weil es in dieser Formel nur $1, j_3$ als die Einheiten von Quaternion gibt, und $1 \cdot j_3 = j_3 \cdot 1 = j_3$, $j_3^2 = -1$, so ist das Doppelverhältnis von Quaternion ähnlich wie dem ordinären einer komplexen Zahl. Die Bedinguug $D'\bar{D}' = D\bar{D}$, $D' + \bar{D}' = D + \bar{D}$ für zwei Doppelverhältnisse D, D' bedeutet, dass sie gleich oder konjugiert sind. Nach dem Satz komplexer Zahlen dass vier Punkte in gewissem Doppelverhältnisse auf einer Ebene durch die Transformationen von Möbius in vier Punkte in gleichem oder konjugiertem Doppelverhältnisse transformiert werden und umgekehrt, folgt, *dass zwei Systeme von vier Kugeln mit gleichem Doppelverhältnisse von Quaternion durch die Transformationen von Lie in einander transformiert werden, wobei das Wort „gleiches Doppelverhältnis von Quaternion" bedeutet dass*

$$D' + \bar{D}' = D + \bar{D}, \quad D'\bar{D}' = D\bar{D}.$$

Später benutzen wir den Ausdruck immer in diesem Sinn. *In ähnlicher Weise folgt, dass die Invariante* $D - \bar{D} = 0$ *bedeutet, dass vier Kugeln durch geeignete Transformation von Lie in vier Punkte auf einem Kreise gebracht werden können.*

Die Hüllfläche einer Kugelschar die aus den Kugeln, welche drei gegebene einander nicht berührende Kugeln berühren, besteht, wird Zyklide von Dupin genannt. Dieser Fläche gehört noch eine zweite Kugelschar an, die aus den Kugeln, welche alle Kugeln der ersten Kugelschar berühren, besteht. Transformiert man die drei gegebenen Kugeln in drei Punkte, so wird die erste Kugelschar solche, die aus den durch die drei Punkte gehenden Kugeln besteht, und die Kugeln der zweiten Kugelschar werden die Punkte auf dem Kreise, der durch die drei Punkte geht. Also kann man eine Zyklide von Dupin durch die Transformationen von Lie in einen Kreis transformieren, und umgekehrt. Daraus ergibt sich, dass *das Doppelverhältnis von beliebigen vier Kugeln einer Zyklide von Dupin immer eine komplexe Zahl ist, und umgekehrt.*

§ 8. Einige andere Erklärungen des Doppelverhältnisses.

1). Die hexasphärischen Koordinaten (u) einer gerichteten Kugel sind

$$(1) \qquad u_0 = \rho\frac{1-(x^2+y^2+z^2-r^2)}{2}, \quad u_1 = \rho\frac{1-(x^2+y^2+z^2-r^2)}{2},$$

$$u_2 = \rho x, \quad u_3 = \rho y, \quad u_4 = \rho z, \quad u_5 = \rho r \quad (\rho \neq 0)$$

und $$-u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 - u_5^2 = 0.$$

Also wird eine Kugel als ein Punkt auf der Hyperfläche zweiten Grades im fünf-dimensionalen Raum R_5 gezeigt.

Wenn wir beliebig gegebene vier Kugeln als vier Punkte in der Ebene $z=0$ annehmen, weil es möglich ist (vgl. § 6), so haben wir

$$(2) \qquad u_0 = \rho\frac{1+(x^2+y^2)}{2}, \quad u_1 = \rho\frac{1-(x^2+y^2)}{2},$$

$$u_2 = \rho x, \quad u_3 = \rho y, \quad u_4 = 0, \quad u_5 = 0.$$

Der lineare Unterraum von drei Dimensionen, welcher durch die den vier Kugeln entsprechenden vier Punkte bestimmt wird, ist

$$u_4 = u_5 = 0.$$

Die Fläche (2-dimensional) zweiten Grades, welche der Schnitt der Hyperfläche durch den linearen Unterraum ist, ist

$$-u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0, \quad u_4 = u_5 = 0.$$

oder $$\frac{u_2 + j_3 u_3}{u_0 \mp u_1} = \frac{u_0 \pm u_1}{u_2 - j_3 u_3} = K \qquad (j_3^2 = -1).$$

Aus diesen Formeln folgt, dass die Linien

$$u_2+j_3u_3=0=u_0\mp u_1,\quad u_0\pm u_1=u_2-j_3u_3=0$$

die Erzeugenden der Fläche zweiten Grades sind, und aus (2) erhält man $K=x+j_3y$ oder $K=\frac{1}{x-j_3y}$.

Das ordinäre Doppelverhältnis von den vier Erzeugenden, die den Kugeln entsprechen, ist das von K, und dieses Doppelverhältnis ist

$$D=\{(x_1-x_3)+(y_1-y_3)j_3\}\frac{1}{\{(x_1-x_4)+(y_1-y_4)j_3\}}\cdots\cdots.$$

Nach § 7 (1) ergibt sich, dass das Doppelverhältnis von den vier Erzeugenden mit dem der vier Kugeln identisch ist.

2) Nach der Geraden-Kugeltransformation von Lie können wir eine Kugel einer Geraden entsprechen lassen. Die Beziehungen sind

$$\begin{aligned}
&p_{12}\quad u_1+u_0=\rho\\
&p_{13}=u_2+j_3u_4=\rho(x+j_3z)\\
&p_{14}=u_3+u_5=\rho(y+r)\\
&p_{34}=u_1-u_0=\rho(x^2+y^2+z^2-r^2)\\
&p_{42}=u_2-j_3u_4=\rho(x-j_3z)\\
&p_{23}=u_3-u_5=\rho(y-r)
\end{aligned}$$

wo (p) die Linienkoordinaten, (u) die sphärischen Koordinaten sind. (vgl. Blaschke; Differentialgeometrie III, § 54) Ebenso wie in 1), nehmen wir $y=r=0$, so haben wir

$$p_{12}:p_{13}:p_{14}:p_{34}:p_{42}:p_{23}=1:x+j_3z:0:x^2+y^2:x-j_3z:0.$$

Diese Geraden schneiden die zwei Geraden

$$x_1=x_4=0,\quad x_2=x_3=0\qquad ((x)\text{ projektive Punktkoordinaten in der Linienraum})$$

und die Schnittpunkte sind

$$1:0:0:(x-j_3z)\quad\text{und}\quad 0:1:(x+j_3z):0$$

Durch den gleichen Rechenvorgang wie in 1), ergibt sich, dass das Doppelverhältnis von diesen vier Schnittpunkten mit dem Doppelverhältnis von vier Kugeln identisch ist.

§ 9. Doppelverhältnis von zwei Kugeln unter der Geometrie von Möbius.

Bei der Transformation von Möbius werden zwei entgegengerichtete orientierte Kugeln wieder in solche von denselben Eigenschaften gebracht, die Beziehung, $X=-\bar{Y}$, zwischen zwei Kugeln X, Y, ist also bei dieser Transformation invariant. Daraus folgt, dass, gegeben zwei Kugeln X, Y, das Doppelverhältnis $(X, Y; -\bar{X}, -\bar{Y})$ unter dieser Transformation Bedeutung hat.

Nimmt man

$$X = ir + x_1 j_1 + x_2 j_2 + x_3 j_3,$$
$$Y = is + y_1 j_1 + y_2 j_2 + y_3 j_3$$

an, so ist $(X, Y; -\bar{X}, -\bar{Y})$

$$= (X + \bar{X}) \frac{1}{X + \bar{Y}} (Y + \bar{Y}) \frac{1}{Y + \bar{X}}$$

$$= \frac{-4rs}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 - (r+s)^2}.$$

Sind die Winkel zwischen den nach aussen gerichteten Halbmessern, welche sich an den Schnittpunkten der zwei Kugeln begegnen, gleich θ, so folgt

$$(X, Y; -\bar{X}, -\bar{Y}) = \frac{-4rs}{r^2 + s^2 - 2rs\cos\theta - (r+s)^2} = \sec^2 \frac{\theta}{2}.$$

Damit ergibt sich, dass *das Doppelverhältnis zweier Kugeln unter der Geometrie von Möbius die Winkel zwischen den Kugeln bedeutet.*

§ 10. Doppelverhältnis von zwei Kreisen unter der Geometrie von Möbius.

Wir definieren das Doppelverhältnis von zwei Kreisen als das ihrer vier Foci, d. h. der Nullkugeln, welche durch jeden der gegebenen Kreise gehen, weil die Foci eines Kreises eine kovariante Figur zum Kreise unter der Geometrie von Möbius sind.

Dieses Doppelverhältnis hat eine einfache Beziehung mit dem Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte, wo die Kugel, welche den beiden Kreisen senkrecht ist, die Kreise schneidet.

Transformiert man diese Kugel durch eine geeignete Transformation von Möbius in eine Ebene und die vier Schnittpunkte in zwei Punktpaare, welch die Ecke eines Parallelogramms mit Mittelpunkt als Anfangspunkt sind, so erhalten wir die folgenden Kreise

K: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $lx + my = 0$;
K': $x^2 + y^2 + z^2 = r'^2$, $l'x + my' = 0$.

Die Koordinaten der Foci sind

F_1: $x = ilr$, $y = imr$, $z = 0$;
F_2: $x = -ilr$, $y = -imr$, $z = 0$;
F_1': $x = il'r'$, $y = im'r'$, $z = 0$;
F_2': $x = -il'r'$, $y = -im'r'$, $z = 0$;

und die der Schnittpunkte

P_1: $x = -lr$, $y = mr$, $z = 0$;
P_2: $x = lr$, $y = -mr$, $z = 0$;
P_1' $x = -l'r'$, $y = m'r'$, $z = 0$;
P_2' $x = l'r'$, $y = -m'r'$, $z = 0$.

Dann erhalten wir

$$D_F = D(F_1', F_2; F_1', F_2') = \left\{ i(lr - l'r')j_1 + i(mr - m'r')j_2 \right\} \frac{1}{\{\dots\dots\}} \dots\dots,$$

$$D_P \equiv D(P_1, P_2; P_1', P_2') = \left\{ -(lr - l'r')j_1 + (mr - m'r')j_2 \right\} \frac{1}{\{\dots\dots\}} \dots\dots.$$

Also $$D_F = \frac{1}{\bar{D}_P},$$

oder $$D_F \bar{D}_F = \frac{1}{D_P \bar{D}_P},$$

$$D_F + \bar{D}_F = \frac{1}{\bar{D}_P} + \frac{1}{D_P} = \frac{D_P + \bar{D}_P}{D_P \bar{D}_P},$$

$$D_F - \bar{D}_F = \frac{D_P - \bar{D}_P}{D_P \bar{D}_P}.$$

Diese Beziehung ist nicht nur in obiger besonderer Lage der Kreise, sondern, weil $D + \bar{D}$ und $D\bar{D}$ Invarianten sind, allgemein gültig. Daraus folgt, dass das *Doppelverhältnis von den Foci der Inverse dem der Schnittpunkte gleich ist.* (in dem, in § 7 erwähnten Sinne)

Die Bedingung, dass die vier Foci auf einem Kreise liegen, also $D_F - \bar{D}_F = 0$ *oder* $D_P - \bar{D}_P = 0$, *d. h. die vier Schnittpunkte ebenfalls auf einem Kreise, ist die Bedingung dafür, dass die zwei Kreise auf einer Kugel liegen.* (vgl. Coolidge; „A Treatise on the circle and the sphare" p. 449)

§ 11. Linearer Komplex von Kugeln.

Die Formel

$$A X\bar{X} + BX + \bar{X}\bar{B} + C = 0$$

(A, B, C sind Hyperquaternionen, mit $A = \bar{A}$, $C = \bar{C}$)
bedeutet einen linearen Komplex von Kugeln. Denn aus § 8 (1)

$$X\bar{X} = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$$

$$= \frac{1}{\rho}(u_0 - u_1)$$

$$1 = \frac{1}{\rho}(u_0 + u_1)$$

$$BX + \bar{X}\bar{B} = 2(b_0 x_0 - b_1 x_1 - b_2 x_2 - b_3 x_3)$$

$$= 2(ib_0 r - b_1 x - b_2 y - b_3 z)$$

$$= \frac{2}{\rho}(ib_0 u_5 - b_1 u_2 - b_2 u_3 - b_3 u_4).$$

So erhält man

$$A X\bar{X} + BX + \bar{X}\bar{B} + C$$

$$= \frac{1}{\rho}\left\{ (a_0 + c_0)u_0 + (c_0 - a_0)u_1 - 2b_1 u_2 - 2b_2 u_3 - 2b_3 u_4 + 2ib_0 u_5 \right\}.$$

Demnach definiert diese Formel einen linearen Komplex von Kugeln, und umgekehrt. Diese Formel ist ähnlich der des Kreises in der Gauss'schen Ebene,

d. h. $Az\bar{z}+Bz+\bar{B}\bar{z}+C=0$.

(A, B, C, z sind komplexe Zahlen, mit $A=\bar{A}$, $C=\bar{C}$)

Transformiert man die Formel mit $X'=\frac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\delta}$ und $X'=\bar{X}$ so erhält man

$$A'X'\bar{X}'+B'X'+\bar{X}'\bar{B}'+C'=0 \qquad (A'=\bar{A}',\ C'=\bar{C}').$$

Und zwar

i) für $X=\bar{X}'$,
$A'=A$, $B'=B$, $C'=C$;

ii) für $X=\frac{1}{X'}$,
$A'=C$, $B'=\bar{B}$, $C'=A$;

iii) für $X=\alpha X'$ $(\alpha\bar{\alpha}=0)$,
$A'=A\alpha\bar{\alpha}$, $B'=B\alpha$, $C'=C$,

iv) für $X=X'+\beta$
$A'=A$
$B'=A\bar{\beta}+B$
$C'=A\beta\bar{\beta}+B\beta+\bar{\beta}B+C$.

Daraus folgt, dass die Formel $I\equiv B\bar{B}-AC$ (eine komplexe Zahl) eine relative Invariante unter den Transformationen $X'=\frac{\alpha X+\beta}{\gamma X+\delta}$ und $X'=\bar{X}$ ist.

Und für die Transformationen i), ii), iv)

$$I'=I$$

für iii)

$$I'=\alpha\bar{\alpha}I.$$

Wenn es zwei lineare Komplexe

$$AX\bar{X}\pm BX+\bar{X}\bar{B}+C=0 \qquad (A=\bar{A},\ C=\bar{C}),$$
$$A^*X\bar{X}+B^*X+\bar{X}\bar{B}^*+C^*=0 \qquad (A^*=\bar{A}^*,\ C^*=\bar{C}^*)$$

gibt, so kann man leicht nachweisen, dass

$$I_{11}\equiv B\bar{B}-AC, \quad I_{22}\equiv\bar{B}^*B^*-A^*C^*,$$
$$I_{12}=\frac{1}{2}\left\{(B\bar{B}^*+B^*\bar{B})-(AC^*+A^*C)\right\}$$

relative Invariante sind.

Und für die Transformationen i), ii), iv)

$$I_{12}'=I_{12}$$

für iii)

$$I_{12}' = a\bar{a} I_{12}.$$

Also ist $K = \dfrac{I_{12}^2}{I_{11} I_{22}}$ eine absolute Invariante.

Wenn man

$$AX\bar{X} + BX + \bar{X}\bar{B} + C$$
$$= -l_0 u_0 + l_1 u_1 + l_2 u_2 + l_3 u_3 + l_4 u_4 - l_5 u_5$$

setzt, so erhält man aus (1)

$$l_0 = -\frac{1}{\rho}(a_0 + c_0), \qquad l_1 = -\frac{1}{\rho}(a_0 - c_0),$$
$$l_2 = -\frac{2}{\rho} b_1, \qquad l_3 = -\frac{2}{\rho} b_2,$$
$$l_4 = -\frac{2}{\rho} b_3, \qquad l_5 = -\frac{2}{\rho} i b_0$$

und ähnlich mit dem zweiten Komplexe.

Also $< ll^* > = -l_0 l_0^* + l_1 l_1^* + l_2 l_2^* + l_3 l_3^* + l_4 l_4^* - l_5 l_5^*$

$$= \frac{1}{\rho\rho^*}\Big\{ -(a_0 + c_0)(a_0^* + c_0^*) + (a_0 - c_0)(a_0^* - c_0^*)$$
$$+ 4 b_1 b_1^* + 4 b_2 b_2^* + 4 b_3 b_3^* + 4 b_0 b_0^* \Big\}$$
$$= \frac{4}{\rho\rho^*}\Big\{ (B\bar{B}^* + B^*\bar{B}) - (AC^* + A^* C) \Big\} = \frac{8}{\rho\rho^*} I_{12}$$

$$< ll > = \frac{8}{\rho^2}\Big\{ B\bar{B} - AC \Big\} = \frac{8}{\rho^2} I_{11}$$

$$< l^* l^* > = \frac{8}{\rho^{*2}} I_{22}$$

Daher $K = \dfrac{I_{12}^2}{I_{11} I_{22}} = \dfrac{< ll^* >^2}{< ll > < l^* l^* >}$.

Und K ist mit der Invariante K, welche Blaschke in seinem Werk, „Vorlesungen über Differenzialgeometrie“ III, S. 198, definiert, identisch.

Wenn $I = B\bar{B} - AC = 0$

so, erhält man für $A = 1$

$$X\bar{X} + BX + \bar{X}\bar{B} + C$$
$$= X\bar{X} + BX + \bar{X}\bar{B} + B\bar{B}$$
$$= (\bar{X} + B)(X + \bar{B}).$$

Also besteht der lineare Komplex aus den Kugeln, welche die Kugel $-\bar{B}$ berühren, d. h. er ist parabolisch.

Zum Schluss möchte ich Herrn Professor T. Nishiuchi meinen herzlichen Dank für seine wertvollen Ratschläge aussprechen.

A Theoretical Note on the Diurnal Variation of Wind-Vector due to the Variation of Eddy Viscosity[1]

By Tadao Namekawa and Tatutosi Takahasi

(Received December 16, 1937)

I. Introduction

The diurnal variation of wind-vector in the lower atmosphere is a familiar phenomenon in meteorology and it is generally accepted that this phenomenon is a consequence of the daily convection. As for the variation in the atmospheric layer above the flat open land-area where no local orographic influence appears, the classical Espy-Köppen's theory is well known. Prof. G. I. Taylor[2] modified this theory and concluded that this phenomenon is to be explained as a result of the diurnal variation of the coefficient of eddy viscosity. Assuming a quasi-steady state, he got an excellent simple theory which gives a clear explanation of the chief characteristic nature of the diurnal variation of wind-speed; but which fails to give a satisfactory explanation of the diurnal characteristics of wind-direction. The diurnal variation of wind-direction is also a remarkable phenomenon, but there is no comprehensive dynamical theory which explains the diurnal characteristics of wind-direction as well as of wind-speed. Iswekov's report of his study,[3] dealing with cases where the eddy viscosity changes periodically, is full of instructive hints for the author's present study. It must be borne in mind, however, that he does not attempt to inquire into the question of why the diurnal variation of wind occurs as a result of the variation of the eddy viscosity; i. e., as he gives a periodic function for the wind at the earth's surface, his study must be considered to have been directed only to the propagative nature of diurnal wind-vector in an atmospheric layer which is subject to a periodic change of eddy viscosity. H. Futi[4] has also treated the propagating nature of the diurnal wind-vector in a case where the eddy viscosity varies with altitude. What the writers intend now is an attempt to construct a

1. The outline of this paper was read at the Annual Meeting of Physico-Mathematical Society of Japan in Apr. 1935. 2. Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. XCIV, 137.
3. Met. Zs. **46**, 1 (1929). 4. Jap. J. Met. **10**, 6, 345.

dynamical theory concerning the origin of the diurnal wind-vector, under Prof. G. I. Taylor's ingenious suggestion, and not a general discussion of the diurnal variation of the wind.

II. The Problem and its Approximate Solution

Let us suppose a simplified case containing all the essential points of our problem, and by solving this idealized case, come to our final conclusion.

(i) *Dynamical equation*

With the usual notations, we have

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = 2\omega \bar{v} \sin\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\bar{u}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -2\omega \bar{u} \sin\varphi + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Putting $\lambda = 2\omega \sin\varphi$, $k = \frac{K}{\rho}$, $G = -\frac{1}{\rho\lambda}\frac{\partial p}{\partial y}$, $u = \bar{u} + G$,

$v = \bar{v}$, $V = u + iv$, and $i = \sqrt{-1}$,

we get $$\frac{\partial V}{\partial t} + i\lambda V = k\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \qquad \text{.....(1)}$$

for the working dynamical equation.

(ii) *Coefficient of eddy viscosity* (k).

In order to simplify the mathematical treatment, we consider a most simple case which barely serves our purpose, i. e.,

$$k = k_0 - k_1 \cos\sigma t \qquad \text{.....(2)}$$

($t=0$ at midnight, $\sigma = {}^{2\pi}/_{T}$ $T=24$ hours) where k_0 and k_1 are given constants independent of height (z) and time (t).

(iii) *Upper boundary condition.*

We assume that a given constant gradient wind velocity (G) prevails at a certain height (H), i. e., $\bar{u} = G$ or $u = 0$ at $z = H$, ...(3)

where H is assumed independent of time.

(iv) *Bottom-surface condition.*

At first, we consider a reasonable condition, viz.,

$$k\frac{\partial V}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0.002(V_0 + G)\,|\,V_0 + G\,|,$$

where suffix 0 indicates the surface-value of the wind-vector. But this condition is non-linear and causes some serious mathematical difficulties, therefore it is advantageous to make some simplification. Thus, in spite of unavoidable depreciation in the validity of the solution, we must perform the linearization of the above condition. In this way, we

suppose a fundamental state and introduce a wind-vector, $\bar{V}$, which satisfies the equation of $i\lambda\bar{V}=k_0\frac{\partial^2\bar{V}}{\partial z^2}$; then we get $\bar{V}=C\sinh\beta_0(H-z)$ as a solution of the above equation which satisfies the boundary condition of $\bar{V}=0$ at $z=H$, where $\beta_0=1/\sqrt{\lambda/k_0}\,e^{i\pi/4}$ and the arbitrary constant C can be found by the aid of the method of numerical trials from the condition,

$$k_0\frac{\partial\bar{V}}{\partial z}\Big|_{z=0}=0.002(\bar{V}_0+G)\,|\,\bar{V}_0+G\,|$$

which is introduced also for the fundamental state.

Having simplified the non-linear surface condition by the elimination of the fundamental part above mentioned, we have for a deviating part $V''(=V-\bar{V})$,

$$\frac{\partial V''}{\partial z}\Big|_{z=0}-\varepsilon\cos\sigma t\frac{\partial\bar{V}}{\partial z}\Big|_{z=0}=qV_0'', \qquad \text{.....(4)}$$

where $q=\frac{0.002}{k_0}|\bar{V}_0+G|$ and $\varepsilon=k_1/k_0$.

This adapted method of approximation which involves an assumption of $|\bar{V}_0+G+V_0'|\fallingdotseq|\bar{V}_0+G|$, may invite serious objection. Indeed, this is the most difficult point in the authors' present study; yet they believe that the essential character of the problem remains unaltered. It must be admitted, however, that the solution thus obtained is not exact and in fact this study degenerates into the framing of a semi-quantitative theory.

(v) *Stationary condition.*

Instead of an initial condition, we take $V(t)=V(t+T)$ ...(5) from the nature of the problem.

(vi) *The required solution.*

Now we consider a particular solution of eq. (1), which satisfies the condition (3),

$$V=A_n e^{(k_0\beta_n^2-i\lambda)t-\frac{k_1\beta_n^2}{\sigma}\sin\sigma t}\sinh\beta_n(H-z)$$

and β_n is determined by the condition (5), i.e.,

$$\beta_n^2=i(n\sigma+\lambda)/k_0 \qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \text{.....})$$

or
$$\beta_n=B_n e^{i\varepsilon\pi/4},\quad B_n=\sqrt{\frac{\varepsilon(n\sigma+\lambda)}{k_0}}\quad \left.\begin{array}{ll}\varepsilon=1 & \text{for } n\sigma+\lambda\geqq 0\\ \varepsilon=-1 & \text{for } n\sigma+\lambda<0\end{array}\right\}\ \text{...(6)}$$

Thus we have an appropriate solution,

$$V=\sum_{-\infty}^{+\infty}A_n e^{inx-i\gamma\sin\sigma t}\sinh\beta_n(H-z) \qquad \text{.....(7)}$$

$$(x=\sigma t-\varepsilon\sin\sigma t,\quad \gamma=\lambda k_1/\sigma k_0)$$

where constant-vectors A_n are determined by the remaining condition (4). Using the following two auxiliary expressions of Fourier's expansion,

$$e^{i\gamma \sin \sigma t} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} b_n e^{inx}, \quad \text{and} \quad \cos \sigma t e^{i\gamma \sin \sigma t} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}$$

where $$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\gamma \sin \sigma t} e^{-inx} dx = \frac{\gamma}{ne+\gamma} J_n(ne+\gamma)$$

and

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos \sigma t e^{i\gamma \sin \sigma t} e^{-inx} dx = \frac{nJ_n(ne+\gamma)}{ne+\gamma}$$
$$- \frac{e}{2}\left\{\frac{(n-1)}{ne+\gamma} J_{n-1}(ne+\gamma) + \frac{n+1}{ne+\gamma} J_{n+1}(ne+\gamma)\right\} \quad \ldots\ldots(8)$$

and noticing

$$V' = V - \bar{V} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{A_n \sinh \beta_n (H-z) - b_n C \sinh \beta_0 (H-z)\right\} e^{-i\gamma \sin \sigma t + inx}$$

we get from the condition (4)

$$A_n = -\frac{\beta_0 \cosh \beta_0 H (b_n + eC_n) + q b_n \sinh \beta_0 H}{\beta_n \cosh \beta_n H + q \sinh \beta_n H} C \quad \ldots\ldots(9)$$

The required solution devised for the numerical computations is arranged as follows :—

$$V = \bar{V} + V' \qquad \bar{V} = C \sinh \beta_0 (H-z)$$
$$V' = \bar{V} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} w_n e^{-i\gamma \sin \sigma t + inx}$$

where

$$w_n = \left\{\frac{\beta_0 (b_n + eC_n) \coth \beta_0 H + q b_n}{\beta_n \coth \beta_n H + q} \frac{\sinh \beta_n (H-z)}{\sinh \beta_n H} \frac{\sinh \beta_0 H}{\sinh \beta_0 (H-z)} - b_n\right\}$$
$$\ldots\ldots(10)$$

and the resultant wind vector is $V+G$ where G is the given gradient velocity.

III. Numerical Examples

By giving two specified examples, we now try to make clear some main characters contained in the formal solution of (10).

Ex. 1. Assume $k_0 = k_1 = 2 \times 10^4$, $H = 10^5$, $G = 5 \times 10^2$ and $\varphi = 45^\circ$, where all the units adopted are C. G. S. system. Then we have $q = 3.3 \times 10^{-5}$, $\gamma = 1.4$ and $e = 1$. The values of β_n, b_n and c_n are calculated in Table 1. Table 2 gives the values of $\bar{V}$ and V'(at $t=o$), and the final results which represent the diurnal characters of wind-vector are shown in Figs. 1 and 2.

Table 1.

$\beta_0 = 7.21\times10^{-5}e^{i\pi/4}$	$b_0 = +0.567$	$c_0 = -0.388$
$\beta_1 = 9.33$ „ „	$b_1 = +0.304$	$c_1 = +0.037$
$\beta_2 = 11.17$ „ „	$b_2 = +0.193$	$c_2 = +0.085$
$\beta_3 = 12.73$ „ „	$b_3 = +0.137$	$c_3 = +0.084$
$\beta_4 = 14.00$ „ „	$b_4 = +0.098$	$c_2 = +0.067$
$\beta_5 = 15.26$ „ „	$b_5 = +0.078$	$c_5 = +0.060$
$\beta_6 = 16.40$ „ „	$b_6 = +0.064$	$c_6 = +0.052$
$\beta_{-1} = 3.82$ „ „	$b_{-1} = -0.686$	$c_{-1} = +0.539$
$\beta_{-2} = 4.67\times10^{-5}e^{-i\pi/4}$	$b_{-2} = -0.102$	$c_{-2} = -0.104$
$\beta_{-3} = 7.64$ „ „	$b_{-3} = -0.064$	$c_{-3} = -0.043$
$\beta_{-4} = 9.76$ „ „	$c_{-4} = -0.045$	$c_{-4} = -0.029$
$\beta_{-5} = 11.45$ „ „	$b_{-5} = -0.035$	$c_{-5} = -0.026$
$\beta_{-6} = 12.87$ „ „	$b_{-6} = -0.030$	$c_{-6} = -0.014$

Table 2. V' (cm./sec., angle degree).

	$z=0$	$z=50^m$	$z=100^m$	$z=200^m$	$z=300^m$
$\bar{V}$	210 ∠152°00′	164 ∠138°00′	127 ∠123°20′	78 ∠95°20′	48 ∠67°00′
$n=0$	59.6 ∠345°50′	46.6 ∠331°50′	36.1 ∠317°10′	22.2 ∠289°10′	13.6 ∠260°50′
+1	6.6 ∠343°30′	11.0 ∠345°40′	11.7 ∠332°40′	11.2 ∠304°20′	8.6 ∠274°20′
+2	2.3 ∠340°30′	7.2 ∠351°00′	9.4 ∠336°10′	9.4 ∠303°20′	7.5 ∠269°00′
+3	2.1 ∠340°40′	7.2 ∠349°50′	9.0 ∠332°50′	8.3 ∠298°30′	6.2 ∠262°40′
+4	2.3 ∠340°10′	6.1 ∠347°20′	7.4 ∠329°50′	6.7 ∠293°45′	4.8 ∠258°40′
+5	2.5 ∠339°10′	5.6 ∠344°30′	6.7 ∠326°30′	5.7 ∠290°30′	3.9 ∠255°30′
+6	2.3 ∠340°50′	4.9 ∠343°40′	6.0 ∠324°30′	4.9 ∠288°20′	3.2 ∠252°10′
−1	50.0 ∠172°00′	27.9 ∠150°10′	13.6 ∠112°30′	19.3 ∠352°30′	24.5 ∠319°20′
−2	44.5 ∠ 61°40′	43.8 ∠ 71°00′	47.0 ∠107°20′	32.2 ∠ 81°10′	23.3 ∠ 87°50′
−3	18.7 ∠ 81°20′	19.0 ∠ 89°10′	17.9 ∠101°20′	11.3 ∠ 99°20′	5.6 ∠104°00′
−4	10.7 ∠ 81°20′	11.8 ∠ 98°40′	10.5 ∠102°00′	6.1 ∠106°20′	2.5 ∠100°20′
−5	9.0 ∠ 95°40′	9.0 ∠103°30′	7.6 ∠107°50′	4.1 ∠109°50′	1.5 ∠ 91°50′
−6	7.6 ∠108°40′	6.9 ∠110°50′	5.7 ∠113°00′	3.0 ∠109°00′	1.2 ∠ 78°20′

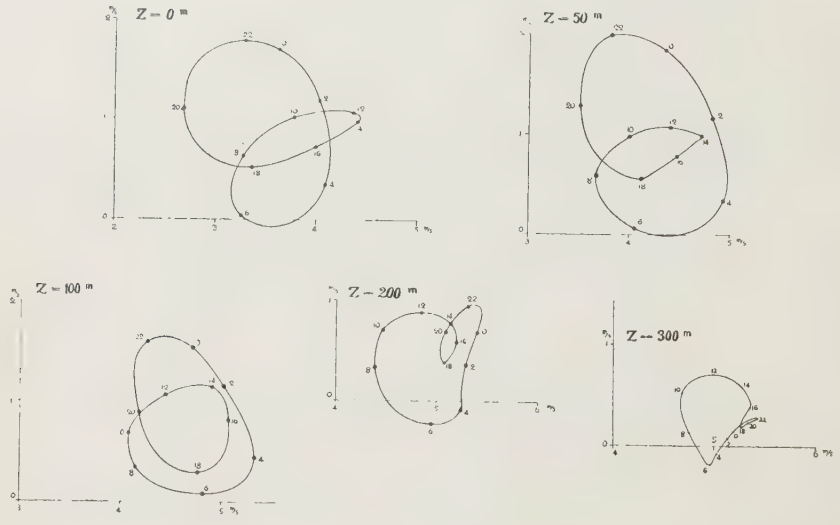
Table 3. $V+G$ (m./sec., angle degree.)

Time \ Height	$z=0^m$	$z=50^m$	$z=100^m$	$z=200^m$	$z=300^m$
0^h	4.01 ∠25°10′	4.71 ∠23°00′	4.96 ∠18°10′	5.48 ∠7°00′	5.20 ∠1°20′
2	4.20 ∠16°30′	4.96 ∠13°30′	5.25 ∠12°40′	5.34 ∠3°50′	5.15 ∠0°30′
4	4.11 ∠ 5°00′	4.94 ∠ 3°50′	5.35 ∠ 4°50′	5.28 ∠−1°10′	5.04 ∠−1°10′
6	3.26 ∠ 0°30′	4.05 ∠ 0°40′	4.82 ∠ 0°50′	4.98 ∠−2°40′	4.98 ∠−2°30′
8	3.34 ∠11°00′	3.69 ∠ 9°00′	4.16 ∠ 4°40′	4.43 ∠4°00′	4.77 ∠1°20′

Table 3. Continued.

Time \ Height	$z=0^m$	$z=50^m$	$z=100^m$	$z=200^m$	$z=300^m$
10h	3.91 ∠15°10′	4.11 ∠13°40′	4.13 ∠ 9°40′	4.55 ∠ 9°20′	4.73 ∠6°20′
12	4.50 ∠13°50′	4.53 ∠13°40′	4.57 ∠13°30′	4.95 ∠10°00′	5.04 ∠7°40′
14	4.52 ∠12°30′	4.82 ∠11°40′	5.04 ∠13°20′	5.23 ∠ 8°30′	5.31 ∠6°00′
16	4.06 ∠10°10′	4.53 ∠ 9°50′	5.13 ∠ 9°20′	5.26 ∠ 6°10′	5.38 ∠3°50′
18	3.36 ∠ 8°50′	4.15 ∠ 7°30′	4.78 ∠ 3°40′	5.11 ∠ 4°00′	5.27 ∠1°40′
20	2.92 ∠22°40′	3.74 ∠20°10′	4.28 ∠12°00′	5.17 ∠ 7°40′	5.35 ∠2°10′
22	3.50 ∠30°40′	4.29 ∠27°30′	4.56 ∠20°40′	5.42 ∠10°00′	5.44 ∠2°30′

Fig 1.



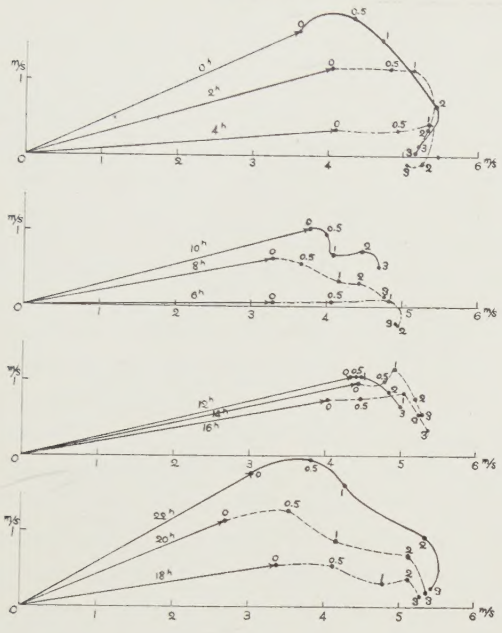
Ex. 2. All the assumed data are the same as in *Ex.* 1, except $k_0 = 2k_1 = 2 \times 10^4$. Results in this case are indicated by Tables 4 and 5.

IV. Conclusions and Remarks

(i) This paper is a short study of the diurnal variation of wind-vector caused by the variation of eddy viscosity. If we compare the proposed theory with the existing theories, we have to make the following remarks :

(a) Retaining the terms which contain $\frac{\partial}{\partial t}$, G. I. Taylor's quasi-

Fig. 2.



steady theory is modified by the writers, and a hydrodynamical theory is obtained which may explain some of the chief diurnal characters of wind direction as well as wind speed.

(b) But as the present theory included the linearization of the non-linear surface condition, it is only valid for semiquantitative purposes. Moreover as the solution is given by the infinite series, inconvenience and inaccuracy unavoidably accompany the numerical computation.

(c) Iswekov's study does not touch our theory; indeed, it is an essentially different problem.

(ii) It is clear that the observed diurnal variation at a given locality is not entirely due to the variation of eddy viscosity, i.e., several other causes are associated; therefore a direct identification of the theory with observed facts is very difficult. Moreover the existing statistical records of the diurnal wind-vectors are invalid, because the usual method of the reduction of wind-vector is not suited for testing our theory; although we find that the theoretical results agree to some extent with the well-known facts observed at the

Table 4. (*Ex.* 2) V' (cm./sec., angle degree.)

	$z=0$	$z=50^m$	$z=100^m$
$\bar{V}$	210 ∠152°00′	164 ∠138°00′	127 ∠123°20′
$n=0$	18.5 ∠345°50′	14.4 ∠331°50′	11.2 ∠317°10′
+1	9.7 ∠165°40′	4.1 ∠ 76°40′	5.5 ∠ 17°00′
+2	4.4 ∠162°50′	2.3 ∠ 56°10′	3.9 ∠ 0°10′
+3	1.5 ∠160°10′	1.6 ∠ 19°00′	2.8 ∠346°30′
+4	0.2 ∠152°00′	1.3 ∠357°50′	1.8 ∠337°00′
+5	0.2 ∠152°00′	0.7 ∠ 3°00′	0.9 ∠337°00′
+6	0.2 ∠152°00′	0.3 ∠ 21°30′	0.6 ∠340°10′
−1	21.4 ∠172°00′	11.0 ∠145°50′	5.2 ∠ 89°20′
−2	11.1 ∠ 60°50′	11.0 ∠ 70°00′	10.4 ∠ 71°50′
−3	2.7 ∠ 80°30′	2.8 ∠ 88°10′	1.3 ∠ 94°00′
−4	1.0 ∠ 98°50′	1.0 ∠ 99°20′	1.0 ∠100°10′
−5	0.4 ∠ 88°30′	0.7 ∠104°20′	0.4 ∠105°00′
−6	0.2 ∠152°00′	0.2 ∠138°00′	0.1 ∠123°20′

Table 5. (*Ex.* 2) $V+G$ (m./sec., angle degree.)

Time \ Height	$z=0^m$	$z=50^m$	$z=100^m$
0^h	3.22 ∠21°00′	4.12 ∠18°30′	4.72 ∠14°10′
2	3.34 ∠19°10′	4.21 ∠17°00′	4.78 ∠13°10′
4	3.31 ∠16°20′	4.04 ∠15°20′	4.68 ∠12°00′
6	3.28 ∠15°10′	3.95 ∠14°10′	4.44 ∠11°50′
8	3.41 ∠15°10′	3.93 ∠14°20′	4.35 ∠12°20′
10	3.62 ∠16°10′	4.04 ∠14°50′	4.40 ∠13°10′
12	3.78 ∠15°00′	4.16 ∠14°10′	4.34 ∠13°30′
14	3.78 ∠14°10′	4.20 ∠13°40′	4.57 ∠12°00′
16	3.60 ∠14°00′	4.14 ∠12°50′	4.53 ∠12°10′
18	3.32 ∠15°00′	3.98 ∠13°50′	4.45 ∠12°00′
20	3.12 ∠17°20′	3.89 ∠15°30′	4.43 ∠12°50′
22	3.12 ∠20°10′	3.96 ∠17°50′	4.56 ∠14°10′

Eiffel Tower and at Lindenberg.

(iii) The resultant diurnal wind-vector is represented in our theory by a composition of the infinite number of the harmonic components. We see in the numerical examples that the components of the clockwise rotating wind-vectors are predominant in general for the localities in the northern hemisphere. The diurnal and semidiurnal clockwise components which are the most prominent among them, have the same order in magnitude; and the total amount of the less-prominent components—higher harmonics of the clockwise rotating vectors, and all the components with counterclockwise rotation,—is not negligible. These circumstances combine to give the resultant vector a complex form. Yet, there remains some tendency toward clockwise rotation. This fact has been already found by Sprung and others and has been explained as the result of the deflecting force of the earth's rotation and the frictional force acting near the ground. Our theory explains this physical mechanism more minutely.

(iv) It is worth while to notice the theoretical results of the vertical distribution of wind vectors for every two hours shown in Fig. 2. We shall find that this differs somewhat from the commonly accepted idea. A few meteorologists, assuming a steady condition, consider that any difference from the ordinary spiral shape of the vertical wind vector is due to the eddy viscosity varying as height varies. While our theoretical results also show that even under the assumptions of non-steady condition and constant eddy viscosity, some remarkable differences from the spiral form of the vertical distribution of wind-vector appear on some occasions. The writers of this paper believe that this information must be of some value to those meteorologists who conduct observations by a pilot-balloon or engage in the reduction of those observations.

Vol. XXI, No. 1, Published January 31, 1938

Price - - - - Yen .50

These Memoirs are on Sale at

MARUZEN COMPANY, LTD.
TOKYO, OSAKA, KYOTO, NAGOYA, YOKOHAMA,
FUKUOKA & SENDAI

昭和十三年一月二十五日印刷
昭和十三年一月三十一日發行

編纂兼發行者　京都帝國大學理學部

印刷者　須磨勘兵衞
京都市下京區北小路通新町西

印刷所　內外出版印刷株式會社
京都市下京區西洞院通七條南

賣捌所　丸善株式會社
東京、大阪、京都、名古屋、横濱、福岡、仙臺

CONTENTS

The Oxidation of Aluminium Foils
By Kenzo Tanaka and Hisatugu Kano 1
Eine Anwendung der Quaternionen zur Kugelgeometrie
von Tatuo Nakae 5
A Theoretical Note on the Diurnal Variation of Wind-Vector due to the Variation of Eddy Viscosity
By Tadao Namekawa and Tatutosi Takahasi 31